



คณิตศาสตร์เบื้องต้น (Basic Mathematics)

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์

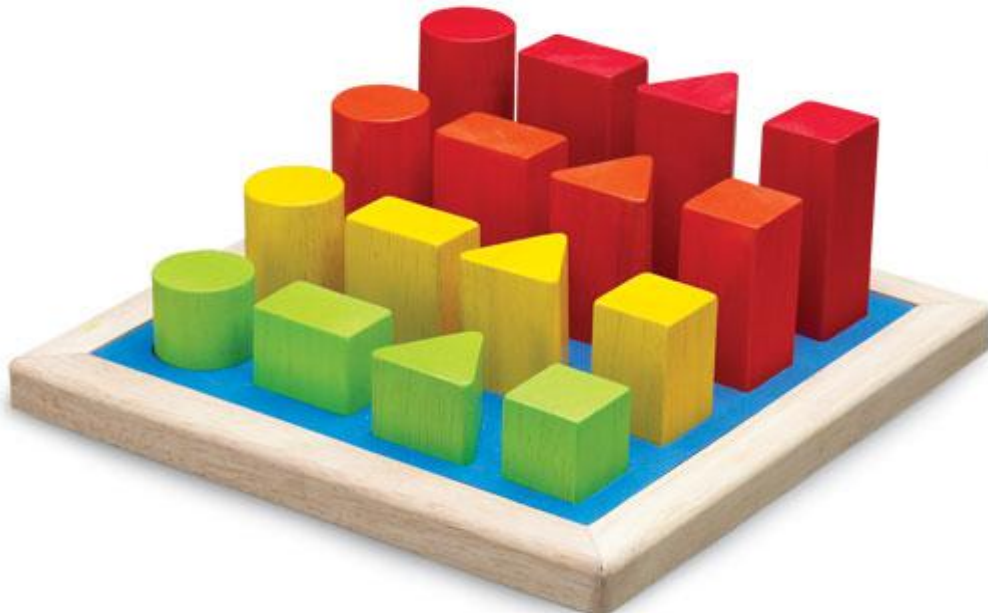
มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย วิทยาเขตนครราชสีมา



เอกสารประกอบการสอน

รายวิชา คณิตศาสตร์เบื้องต้น

รหัส 000139 (2(2-0-4))



บรรยายโดย... ผศ.ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์

น.ธ.เอก,ป.ธ.๔,ปว.ค.(วิชาชีพครู)

Dipl.(การสอนภาษาอังกฤษ),พร.บ.(ภาษาอังกฤษ)

M.A.(Linguistics),ปร.ด.(Cultural Science)

สาขาวิชาภาษาต่างประเทศ คณะมนุษยศาสตร์

มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย วิทยาเขตนครราชสีมา

พุทธศักราช 2557

คำนำ

เอกสารประกอบการสอนเล่มนี้ คือ รายวิชา คณิตศาสตร์เบื้องต้น รหัส 000139 หน่วยกิต 2(2-0-4) ผู้สอนได้เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้ประกอบการเรียนรู้ของนิสิต นักศึกษา ได้มีเอกสารประกอบการสืบค้นและเป็นแนวทางของการศึกษาและการเรียนรู้รายวิชา คณิตศาสตร์เบื้องต้นเป็นไปตามวัตถุประสงค์ของหลักสูตร

สำหรับรายวิชา คณิตศาสตร์เบื้องต้น นั้นเป็นรายวิชาหมวดการศึกษาทั่วไปที่มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัยได้บรรจุให้นิสิตที่เข้าศึกษาระดับอุดมศึกษา ชั้นปีที่ 1 ทุกภาควิชาจะต้องศึกษาในภาคเรียนที่ 1 ของทุกปีการศึกษาและมหาวิทยาลัย ได้จัดพิมพ์ตำราวิชาคณิตศาสตร์เบื้องต้นแล้ว แต่ด้วยระดับพื้นฐานการศึกษาของผู้เรียน นั้นผ่านการศึกษาจากระบบไม่เน้นการศึกษาเฉพาะทางมากนักจึงทำให้การศึกษารายวิชา คณิตศาสตร์เบื้องต้นเป็นไปค่อนข้างช้า จึงทำให้ผู้บรรยายคิดหาวิธีจัดทำเอกสาร ประกอบการสอนเทียบคู่กับตำราวิชาการของมหาวิทยาลัยโดยเนื้อหาสาระเป็นอัน เดียวกัน แต่ผู้บรรยายเพิ่มข้ออธิบายและตัวอย่างบางส่วนที่เห็นว่าจะทำให้ผู้เรียนมี ความเข้าใจมากยิ่งขึ้น องค์ประกอบเนื้อหาสาระการเรียนรู้

บทที่ 1 ประวัติความเป็นมาโดยย่อของวิชาคณิตศาสตร์

บทที่ 2 โครงสร้างและธรรมชาติของคณิตศาสตร์

บทที่ 3 ตรรกศาสตร์เบื้องต้น

บทที่ 4 เซต

บทที่ 5 ระบบจำนวนจริง

บทที่ 6 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

บทที่ 7 สมการและอสมการ

อย่างไรก็ตาม การจัดทำเอกสารประกอบการสอนเล่มนี้ ผู้สอนได้คำนึงถึงผู้เรียน เพื่อเกิดความเข้าใจและมีทัศนคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ที่ดีอันเนื่องด้วยผู้เรียนส่วนหนึ่งจบ การศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจากระบบการศึกษานอกโรงเรียนจึงทำให้ การศึกษาที่ผ่านๆ มาในเนื้อหาสาระการเรียนรู้บางบทดำเนินการไปอย่างช้าๆ ตามที่ได้ กล่าวมาแล้วในเบื้องต้น แต่ก็สำเร็จตามวัตถุประสงค์การเรียนรู้ทุกบทเรียนที่ผู้สอนได้ นำมาบรรจุไว้และเป็นไปตามหลักสูตรพุทธศาสตรบัณฑิต หมวดวิชาการศึกษาทั่วไป

การศึกษาในรายวิชาคณิตศาสตร์เบื้องต้นนั้นจะมีทั้งภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติ หมายความว่า ผู้สอนจะบรรยายตามเนื้อหาสาระการเรียนรู้และซักถามในห้องเรียน และมอบหมายแบบฝึกหัดท้ายบทและใบงานที่ผู้สอนได้จัดทำขึ้นประกอบบทเรียนเพื่อ

ทดสอบผู้เรียนว่ามีความเข้าใจในบทเรียนนั้น ๆ หรือไม่อย่างไร เพราะรายวิชาคณิตศาสตร์นั้นเป็นวิชาที่ต้องมีทั้งศาสตร์และศิลป์ประกอบการศึกษาจึงจะทำให้การเรียนรู้ประสบผลสำเร็จซึ่งมีความเชื่อมโยงกับระบบตัวเลข ตัวแปรที่ต้องหาค่า และนอกจากนั้น ยังมีระบบการใช้เหตุผลในการหาคำตอบ อาทิเช่นเนื้อหาสาระการเรียนรู้ในรายวิชาคณิตศาสตร์เบื้องต้นที่กำหนดไว้คือว่า ศึกษาหลักพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ข้อความ ประโยคเปิด ประพจน์ ตัวบ่งชี้ปริมาณ ค่าความจริง ตัวเชื่อมข้อความ และนิเสธ การหาค่าความจริง การสมมูลกัน การให้เหตุผล เซต ความหมายเซต ประเภทเซต เซตย่อย การเท่ากันของเซต การดำเนินการของเซต พิชคณิตของเซต และการประยุกต์เซต จำนวนจริง ระบบจำนวนจริง คุณสมบัติของจำนวนจริง สมการ อสมการ ค่าสัมบูรณ์ ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ฟังก์ชันเชิงซ้อน แมตริกซ์ การดำเนินการแมตริกซ์ การเท่ากัน การบวก การคูณ ดีเทอร์มิแนนต์ อินเวอร์สแมตริกซ์ ดังนั้น ผู้สอนจึงเห็นว่า การที่ผู้เรียนมีเอกสารประกอบการเรียนรู้ในมือนั้น จะทำให้ผู้เรียนสามารถสืบค้นนอกห้องเรียนได้ด้วยเป็นอย่างดี

สุดท้าย ขอขอบพระคุณคณะผู้บริหาร อาจารย์มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย วิทยาเขตนครราชสีมาที่เป็นกำลังใจและให้โอกาสผู้สอนได้ทำหน้าที่รับผิดชอบรายวิชาคณิตศาสตร์เบื้องต้น และ เนื้อหาสาระการเรียนรู้ที่ผู้สอนได้นำมาบรรจุไว้เป็นเอกสารประกอบการสอนครั้งนี้อาจจะมีข้อบกพร่องและมีเนื้อหาสาระบางส่วนที่อาจจะผิดพลาดไปและไม่สมบูรณ์ต้องขออนุญาตและพร้อมน้อมรับคำชี้แนะและคำติชมทุกประการ เพื่อนำไปสู่การแก้ไขเพิ่มเติมเอกสารประกอบการสอนเล่มนี้ให้มีความสมบูรณ์ต่อไป

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์
-เมษายน 2558

สารบัญ

หน้า

คำนำ.....	2
สารบัญ.....	4
รายละเอียดของรายวิชา มคอ.3.....	5
เนื้อหาสาระการเรียนรู้.....	11
บทที่ 1	11
● ประวัติความเป็นมาโดยย่อของวิชาคณิตศาสตร์.....	11
บทที่ 2	25
● โครงสร้างและธรรมชาติของคณิตศาสตร์.....	25
บทที่ 3	40
● ตรรกศาสตร์เบื้องต้น.....	40
บทที่ 4	53
● เซต.....	53
บทที่ 5	74
● ระบบจำนวนจริง.....	74
บทที่ 6	90
● ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน.....	90
บทที่ 7	98
● การสมการและอสมการ.....	98
● เอกสารอ้างอิง	127

รายละเอียดของรายวิชา (มคอ.๓)
รายวิชา 000139 คณิตศาสตร์เบื้องต้น
หน่วยกิต 2 (2-0-4)

ชื่อสถาบันอุดมศึกษา มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย วิทยาเขตนครราชสีมา
วิทยาเขต/คณะ/ภาควิชา คณะพุทธศาสตร์ คณะครุศาสตร์ คณะมนุษยศาสตร์ คณะสังคมศาสตร์

หมวดที่ 1
ข้อมูลทั่วไป

1. รหัสและชื่อรายวิชา 000 139 คณิตศาสตร์เบื้องต้น (Basic Mathematics)
2. จำนวนหน่วยกิต 2 หน่วยกิต (2-0-4)
3. หลักสูตรและประเภทของรายวิชา พุทธศาสตรบัณฑิต หมวดวิชาศึกษาทั่วไป
4. อาจารย์ผู้รับผิดชอบรายวิชาและอาจารย์ผู้สอน ผศ.ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์ น.ธ.เอก,ป.ธ.๔,ปว.ค.(วิชาชีพรู) Dipl.(การสอนภาษาอังกฤษ),พธ.บ.(ภาษาอังกฤษ) M.A.(Linguistics),ปร.ด.(Cultural Science)
5. ภาคการศึกษา/ชั้นปีที่เรียน ภาคการศึกษาที่ 1 ชั้นปีที่ 1
6. รายวิชาที่ต้องเรียนมาก่อน (Pre-requisites) (ถ้ามี) -
7. รายวิชาที่ต้องเรียนพร้อมกัน (Co- requisites) (ถ้ามี) -
8. สถานที่เรียน มหาวิทยาลัยมหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย วิทยาเขตนครราชสีมา
9. วันที่จัดทำหรือปรับปรุงรายละเอียดของรายวิชาครั้งล่าสุด 29 เมษายน พ.ศ. 2558

หมวดที่ 2
จุดมุ่งหมายและวัตถุประสงค์

1. จุดหมายของรายวิชา 1. เพื่อให้นิสิตรู้หลักพื้นฐาน การใช้เหตุผลและวิธีการทางคณิตศาสตร์ 2. เพื่อให้นิสิตมีความรู้ความเข้าใจทางตรรกศาสตร์ การเขียนสัญลักษณ์และการหาความจริง
--

3. เพื่อให้นิสิตรู้จักเซต การดำเนินการเซต จำนวนจริง สมการ อสมการ ค่าสัมบูรณ์ และการหาค่าตัวแปรในระบบจำนวน 4. เพื่อให้นิสิตรู้จัก ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน และการประยุกต์ใช้ 5. เพื่อให้นิสิตรู้จักแมตริกซ์ การดำเนินการ ดีเทอร์มิแนนต์ อินเวอร์ส และการประยุกต์ใช้แมตริกซ์
2. วัตถุประสงค์ในการพัฒนา/ปรับปรุงรายวิชา เพื่อให้นิสิตมีความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ และสามารถทางคณิตศาสตร์ และสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการศึกษาในวิชาต่าง ๆ และในชีวิตประจำวัน

หมวดที่ 3
ลักษณะและการดำเนินการ

1. คำอธิบายรายวิชา ศึกษาหลักพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ข้อความ ประโยคเปิด ประพจน์ ตัวบ่งชี้ปริมาณ ค่าความจริง ตัวเชื่อมข้อความ และนิเสธ การหาค่าความจริง การสมมูลกัน การให้เหตุผล เซต ความหมายเซต ประเภทเซต เซตย่อย การเท่ากันของเซต การดำเนินการของเซต พิชคณิตของเซต และการประยุกต์เซต จำนวนจริง ระบบจำนวนจริง คุณสมบัติของจำนวนจริง สมการ อสมการ ค่าสัมบูรณ์ ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ฟังก์ชันเชิงซ้อน แมตริกซ์ การดำเนินการแมตริกซ์ การเท่ากัน การบวก การคูณ ดีเทอร์มิแนนต์ อินเวอร์ส แมตริกซ์			
2. จำนวนชั่วโมงที่ใช้ต่อภาคการศึกษา			
บรรยาย	สอนเสริม	การฝึกปฏิบัติ/งานภาคสนาม/การฝึกงาน	การศึกษาด้วยตนเอง
2 ชั่วโมง/สัปดาห์	-	-	4 ชั่วโมง/สัปดาห์
3. จำนวนชั่วโมงต่อสัปดาห์ที่อาจารย์ให้คำปรึกษาและแนะนำทางวิชาการแก่นักศึกษาเป็นรายบุคคล 1 ชั่วโมง/สัปดาห์			

หมวดที่ 4
การพัฒนาการเรียนรู้ของนักศึกษา

1. คุณธรรม จริยธรรม 1.1 คุณธรรม จริยธรรมที่ต้องพัฒนา ปลูกฝัง ความมีวินัย ความใฝ่รู้ใฝ่เรียน มุ่งมั่น ตั้งใจในการเรียนรู้เพื่อให้เกิดความรู้ความสามารถของนิสิต
1.2 การบรรยาย การอภิปราย การค้นคว้ารายงาน การแลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกัน
1.3 การประเมินผลย่อยอย่างสม่ำเสมอในแต่ละหัวเรื่อง การประเมินผลการร่วมอภิปราย และการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ การประเมินผลการสอบกลางภาคและปลายภาค

2. ความรู้ 2.1 ความรู้ที่ต้องได้รับ ความสามารถในการใช้เหตุผล การคิดคำนวณ การคิดวิเคราะห์ การคิดอย่างเป็นลำดับขั้นตอน และการจัดลำดับความคิด
2.2 วิธีการสอน การบรรยาย การอภิปราย การถามตอบ การแลกเปลี่ยนเรียนรู้ การรายงาน การค้นคว้าด้วยตนเอง
2.3 วิธีการประเมินผล การประเมินผลย่อยในแต่ละหัวเรื่อง การประเมินผลจากการอภิปราย และความร่วมมือในการแลกเปลี่ยนเรียนรู้การรายงาน และประเมินผลการสอบกลางภาคและปลายภาค
3. ทักษะทางปัญญา 3.1 ทักษะทางปัญญาที่ต้องพัฒนา การคิดวิเคราะห์ด้วยการจำแนก และการสรุปการคิดอย่างเป็นขั้นตอนและการสรุปผล การคิดวิเคราะห์ และสังเคราะห์ด้วยการบูรณาการกับตัวอย่างและข้อมูลใกล้ตัวของผู้เรียน การค้นคว้าด้วยตนเอง และการฝึกทักษะการคิดต่าง ๆ จากการฝึกทำโจทย์ปัญหาด้วยตนเองของผู้เรียน เกิดเป็นความรู้และทักษะในตัวผู้เรียน
3.2 การบรรยาย การอภิปราย การถามตอบ การแลกเปลี่ยนเรียนรู้ การรายงาน และการค้นคว้าด้วยตนเอง
3.2 วิธีการประเมินผล ประเมินผลย่อยอย่างสม่ำเสมอในแต่ละหัวเรื่อง การประเมินผลการร่วมอภิปราย ซักถาม และการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ การประเมินผลการสอบกลางภาคและปลายภาค
4. ทักษะความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลและความรับผิดชอบ 4.1 ทักษะความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลและความรับผิดชอบที่ต้องพัฒนา นิสิตมีความรับผิดชอบต่อการเรียนรู้ และการพัฒนาตนเองให้มีความรู้ความสามารถ และทักษะเกิดขึ้นในตนเอง และร่วมกันเรียนรู้พัฒนาความรู้ความสามารถและทักษะของกลุ่มร่วมกัน สามารถแลกเปลี่ยนเรียนรู้ระหว่างกัน และช่วยเหลือกันในการพัฒนาความสามารถทุกคนในกลุ่มและนิสิตทุกคนให้มีความรู้ทักษะความสามารถร่วมกัน
4.2 วิธีการสอน ทำกิจกรรมกลุ่มและแลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกัน ทั้งในชั้นเรียนและการศึกษาค้นคว้าร่วมกัน
4.3 วิธีการประเมินผล ประเมินความร่วมมือและการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ เพื่อช่วยพัฒนาทักษะและความรู้ความสามารถของผู้เรียนร่วมกัน
5. ทักษะการวิเคราะห์เชิงตัวเลข การสื่อสาร และการใช้เทคโนโลยี 5.1 ทักษะการวิเคราะห์เชิงตัวเลข การสื่อสาร และการใช้เทคโนโลยีสารสนเทศที่ต้องพัฒนา การแสดงขั้นตอนการคิด วิธีการคำนวณและการคิดการเขียนสัญลักษณ์ การวิเคราะห์และสรุปผลอย่างถูกต้องเหมาะสม
5.2 วิธีการสอน การใช้ Power point การบรรยาย การทำรายงาน การค้นคว้าข้อมูลจากห้องสมุด และการใช้ผู้เรียนมาร่วมคิดวิเคราะห์และแลกเปลี่ยนเรียนรู้

5.3 วิธีการประเมินผล

ประเมินผลการทำงานแลกเปลี่ยนเรียนรู้ การอภิปรายร่วมกัน และการรายงานของนิสิต

หมวดที่ 5

แผนการสอนและการประเมินผล

1. แผนการสอน

สัปดาห์ที่	หัวข้อ/รายละเอียด	จำนวน ชั่วโมง	กิจกรรมการเรียนรู้ สอน/สื่อที่ใช้	ผู้สอน
1	คำอธิบายรายวิชา การวัดผล ประเมินผล หลักพื้นฐาน คณิตศาสตร์ วิธีการ	2	บรรยาย อภิปราย Power point	ผศ.ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์
2-3	บทที่ 1 ประวัติย่อความเป็นมาของ คณิตศาสตร์	4	บรรยาย อภิปราย Power point	ผศ.ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์
4-5	บทที่ 2 โครงสร้างและธรรมชาติ ของคณิตศาสตร์	4	บรรยาย อภิปราย Power point	ผศ.ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์
6	ตรรกศาสตร์ ข้อความ ประพจน์ ประโยคเปิด ค่าความจริง ตัวบ่งชี้ ปริมาณ และตัวเชื่อม	2	บรรยาย อภิปราย แลกเปลี่ยน เรียนรู้ ชักถาม Power point	ผศ.ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์
7	ตัวเชื่อม ข้อความ และนิเสธ การหาค่าความจริง การสมมูลกัน และการให้เหตุผลทดสอบท้าย ชั่วโมง	2	บรรยาย อภิปราย แลกเปลี่ยน ชักถาม Power point	ผศ.ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์
8	เซต ความหมายของเซต วิธีเขียน เซต ประเภทของเซต Power set subset การดำเนินการเซต	2	บรรยาย Power point อภิปราย	ผศ.ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์
9	การดำเนินการเซตเวนแอนด์ออย เลอร์ การประยุกต์เซตเกี่ยวกับ จำนวนเซต	2	บรรยาย Power point อภิปราย แลกเปลี่ยน เรียนรู้	ผศ.ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์
10	การหาจำนวนเซตด้วยวิธีการเวน แอนด์ออยเลอร์ และการ ดำเนินการเซต ทดสอบย่อย	2	บรรยาย Power point อภิปราย รายงานและ แลกเปลี่ยนเรียนรู้	ผศ.ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์
11	สอบกลางภาค	2		ผศ.ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์
12	จำนวนจริง ระบบจำนวนจริง สมบัติของจำนวนจริง สมการ	4	บรรยาย Power point อภิปราย ชักถาม	ผศ.ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์

สัปดาห์ที่	หัวข้อ/รายละเอียด	จำนวน ชั่วโมง	กิจกรรมการเรียนรู้ สอน/สื่อที่ใช้	ผู้สอน
	อสมการ การหาค่าของตัวแปรใน ระบบจำนวนจริง			
13	อสมการ ค่าสัมบูรณ์และการหา ค่าตัวแปรในระบบจำนวนจริง ทดสอบย่อย	2	บรรยาย Power point อภิปราย แลกเปลี่ยน เรียนรู้	ผศ.ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์
14	สอบกลางภาค	2		ผศ.ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์
15	คู่อันดับ ผลคูณค่าที่เขียน ความสัมพันธ์ การหาค่า Domain Range และ ความสัมพันธ์	2	บรรยาย Power point อภิปราย ชักถาม	ผศ.ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์
16	การหาความสัมพันธ์ เมื่อ Domain Range เป็นเซตจำกัด และเซตจำนวนจริง	2	บรรยาย Power point อภิปราย แลกเปลี่ยน เรียนรู้	ผศ.ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์
17	ฟังก์ชัน การคำนวณหาค่า Domain Range ตามที่กำหนด และ Composit Function ทดสอบย่อย	2	บรรยาย Power point อภิปราย แลกเปลี่ยน เรียนรู้	ผศ.ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์
18	สอบปลายภาค	2		ผศ.ดร.สุรพงษ์ คงสัตย์

2. แผนการประเมินผลการเรียนรู้

กิจกรรม ที่	ผลการเรียนรู้	วิธีการประเมิน	สัปดาห์ประเมิน	ส่วนของการ ประเมินผล
1	ความรู้และทักษะการคิด วิเคราะห์ การคิดคำนวณ การร่วมแลกเปลี่ยน เรียนรู้	การตอบคำถาม การทดสอบย่อย	3,6,8,12,15	30
2	ความรู้	สอบกลางภาค	8	30
3	ความรู้	สอบปลายภาค	16	30
4	การร่วมกิจกรรม การ แลกเปลี่ยนเรียนรู้	สังเกตพฤติกรรม การรายงาน	ทุกสัปดาห์	10

หมวดที่ 6

ทรัพยากรประกอบการเรียนการสอน

1. เอกสารและตำราหลัก บุญเลิศ จีรภัทร์ คณิตศาสตร์เบื้องต้น กรุงเทพฯ : J-print 2550. สมชาย สุทธิขาว และคณะ. คณิตศาสตร์เบื้องต้น. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยรามคำแหง. 2538.
2. เอกสารและข้อมูลสำคัญ กรรณิกา กวิกไพฑูรย์ หลักคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2542
3. เอกสารและข้อมูลแนะนำ พีระพล ศิริวงศ์. คณิตศาสตร์พื้นฐาน. กรุงเทพฯ : วิทย์พัฒนา. 2542

หมวดที่ 7

การประเมินและปรับปรุงการดำเนินการของรายวิชา

1. กลยุทธ์การประเมินประสิทธิผลของรายวิชาโดยนักศึกษา 1.1 ประเมินการสอนโดยการซักถามและแลกเปลี่ยนเรียนรู้ 1.2 ซักถามข้อสงสัยในรายละเอียดเนื้อหา 1.3 การแลกเปลี่ยนความเห็นต่อการเรียนรู้ระหว่างครูกับนักเรียน
2. กลยุทธ์การประเมินการสอน 1. ผู้เรียนแสดงความเห็นต่อวิธีการจัดการเรียนรู้ 2. ผู้เรียนซักถามและอภิปรายเพื่อปรับเปลี่ยนการจัดการเรียนรู้
3. การปรับปรุงการสอน 3.1 การแจ้งผลการสอบย่อยและสอบกลางภาคให้ผู้เรียนรู้เพื่อร่วมกันปรับปรุงการจัดการเรียนรู้ 3.2 แลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกันเพื่อหาวิธีพัฒนาการจัดการเรียนรู้ให้เหมาะสมกับผู้เรียนและเนื้อหามากขึ้น
4. การทวนสอบมาตรฐานผลสัมฤทธิ์ของนักศึกษาในรายวิชา 4.1 ให้ผู้เรียนได้รู้ผลการสอบและการควบคุมแบบทดสอบว่ามีจุดเด่นจุดด้อยอย่างไร 4.2 แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ซักถามและตอบในสิ่งที่ผู้เรียนสงสัย เพื่อหาแนวทางการพัฒนาร่วมกัน
5. การดำเนินการทบทวนและการวางแผนปรับปรุงประสิทธิผลของรายวิชา นำผลการสอบ ผลการประเมินในการทดสอบการเรียนรู้และพฤติกรรม การสอบย่อย และการสอบกลางภาคนำมาแลกเปลี่ยน ซักถาม และหาแนวทางร่วมกันในการพัฒนาผู้เรียนให้เกิดผลการเรียนดีขึ้นมีความรู้ความสามารถและทักษะทางคณิตศาสตร์ดีขึ้น

บทที่ 1

บทนำเกี่ยวกับประวัติย่อของคณิตศาสตร์¹

บทที่ 1 นี้เป็นการกล่าวถึงความเป็นมาของวิชาคณิตศาสตร์เพื่อให้ผู้เรียนเห็นถึงความสำคัญและความเป็นมาและความเข้าใจในหลักวิชาการคณิตศาสตร์อันมีความสัมพันธ์กับมนุษย์มาตั้งแต่ดั้งเดิม เพราะมนุษย์เป็นผู้คิดคิดค้นไม่มีใครนอกเหนือจากมนุษย์ที่ เป็นผู้สร้างตัวเลขและระบบคิดอันเป็นมูลค่าด้านการคำนวณในลักษณะต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับตัวเลข ดังนั้น ในบทนี้จึงมีความจำเป็นต้องนำมากล่าวให้ผู้เรียนได้ศึกษาเป็นเบื้องต้น โดยความเป็นจริงแล้วนักคณิตศาสตร์ก็ได้บันทึกความเป็นมาของคณิตศาสตร์แตกต่างกันออกไป แต่สุดท้ายแล้วก็ล้วนเป็นระบบตัวเลขที่มนุษย์ต้องการมีหลักฐานในการทำงานหรือการดำรงชีวิตอย่างเป็นระเบียบ ระบบและมีกฎเกณฑ์ของการแบ่งกลุ่มหรือวิธีคิดของกลุ่มมนุษย์ชาติพันธุ์เท่านั้น

ความว่า...ตั้งแต่สมัยโบราณมนุษย์ได้มีความต้องการจะนับและวัดขนาดของสรรพสิ่งต่างๆ ที่อยู่รายรอบตัว ดังนั้นจึงได้คิดวิธีนับจำนวนขึ้นมา เช่น นำหินมาวางเป็นกองๆ หรือใช้นิ้วนับ และวิธีนี้เองที่ทำให้เรารู้จักระบบเลขฐานสิบ สืบเนื่องจากการที่เรามีนิ้ว 10 นิ้ว การขุดพบอักษรลิ่ม (cuneiform) ของชาว Sumerian ในดินแดน Mesopotamia ที่ตั้งอยู่ระหว่างแม่น้ำ Tigris กับ Euphrates ได้แสดงให้เห็นว่า ชาว Sumerian รู้จักนับเลขเป็นนานประมาณ 5,000 ปีแล้ว แต่ระบบเลขที่ใช้เป็นเลขฐานหกสิบ และนี่ก็คือเหตุผลที่เรายึดติดการแบ่ง 1 ชั่วโมงเป็น 60 นาที และ 1 นาทีเป็น 60 วินาที ส่วนชาว Babylonian เมื่อ 4,000 ปีก่อนนั้น ก็ได้พัฒนาวิชาคณิตศาสตร์ขึ้นไปอีก จนสามารถหาค่าของ $\sqrt{2}$ ได้ถูกต้องพอสมควร นอกจากนี้นักคณิตศาสตร์ชาวบาบิโลน ก็ยังรู้ดีกว่าสมการ $a^2 + b^2 = c^2$ มีคำตอบเป็นเลขจำนวนเต็มหลายชุดเช่น (3, 4, 5) หรือ (5, 12, 13) ทั้งนี้เพราะ $3^2 + 4^2 = 5^2$ และ $5^2 + 12^2 = 13^2$ เป็นต้น นักคณิตศาสตร์ชาวบาบิโลนก็ยังได้พบอีกว่า ถ้า $a = 12,709$ และ $b = 13,500$ แล้ว c จะเท่ากับ 18,541 ด้วย

ชาวอียิปต์ก็มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ไม่น้อยเช่นกัน การขุดพบกระดาษ Moscow papyrus ที่มีอายุ 3,850 ปี ในพีระมิดได้แสดงให้เห็นว่า ชาวอียิปต์รู้จักเลขเศษส่วน รู้วิธีแบ่งขนมปังในอัตราส่วนต่างๆ รู้วิธีหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม รู้วิธีหาปริมาตรของทรงกระบอก เมื่อมีการกำหนดความยาวเส้นผ่าศูนย์กลางและส่วนสูงของทรงกระบอกมาให้ นอกจากนี้นักคณิตศาสตร์อียิปต์ยังได้พบอีกว่า π ซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างความยาวของเส้นรอบวง/เส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมใดๆ มีค่า $256/81$ หรือ 3.16 ศูนย์กลางการศึกษาคณิตศาสตร์ได้เคลื่อนจากอียิปต์สู่กรีซในอีก 1,200 ปีต่อมา เมื่อนักคณิตศาสตร์คนหนึ่งชื่อ Thales แห่งเมือง Miletus ได้ถือกำเนิด Thales เป็นปราชญ์ผู้รอบรู้ในศาสตร์ต่างๆ หลายด้านเช่น ได้พบว่าเวลาเอาแท่งอำพันถูด้วยขนสัตว์ จะเกิดปรากฏการณ์ไฟฟ้าสถิต และในการศึกษาวิชาเรขาคณิต Thales ได้ค้นพบว่า มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมคล้ายทุกรูปจะเท่ากัน และเวลาเขาลากเส้นผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมใดๆ Thales สามารถพิสูจน์ได้ว่า วงกลมวงนั้นจะถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่าๆ กัน Pythagoras เป็นนักคณิตศาสตร์กรีกอีกท่านหนึ่งที่มีชื่อเสียง เขาถือกำเนิดบนเกาะ Samos ในทะเล Aegean เมื่อ 30 ปีก่อนพุทธกาล ในวัยหนุ่ม Pythagoras ได้ศึกษาคณิตศาสตร์ ปรัชญา ฟิสิกส์ และทุกวันนี้เรารู้จักทฤษฎีของ Pythagoras ดี ซึ่งทฤษฎีนี้แปลว่า พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านตรงข้ามมุมฉากของสามเหลี่ยม มุมฉากใดๆ จะเท่ากับผลบวกของพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนอีกสองด้านที่เหลือเสมอ

ประมาณในอดีตเมื่อ 2,500 ปีก่อนนี้ Athens คือศูนย์กลางของวิทยาการทุกแขนง เพราะที่นั่นมีปราชญ์ เช่น Plato Aristotle Pythagoras และ Democritus ในปี พ.ศ. 56 Plato ได้จัดตั้งวิทยาลัยขึ้นเพื่อสอนคณิตศาสตร์และปรัชญาให้นักศึกษา และที่เหนือประตูทางเข้ามีวิทยาลัยคำจารึกว่า “ไม่ให้คนที่ไม่รู้เรขาคณิตเข้า

¹ สุทัศน์ ยกส้าน ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช, แหล่งที่มา <https://blog.eduzones.com/preett/33794,11มีนาคม> 2558.

มาในสถานที่นี้” ทั้งนี้เพราะ Plato มีความเชื่อว่า ใครก็ตามที่จะเป็นผู้บริหารบ้านเมือง ต้องรู้ปรัชญาและคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี Aristotle ก็เป็นปราชญ์กรีกอีกท่านหนึ่งที่ได้เข้ามาศึกษาที่ Plato Academy นี้ และได้สอนประจำที่วิทยาลัยเป็นเวลานาน 20 ปี จนกระทั่ง Plato ตาย Aristotle สนใจศึกษาวิชาตรรกวิทยา ซึ่งเกี่ยวข้องกับความเป็นเหตุผลเช่น การสรุปว่าเมื่อคนทุกคนต้องตาย และ Socrates เป็นคน ดังนั้น Socrates ก็ต้องตาย เป็นต้น

ในรายปี พ.ศ. 250 องค์ฟาโรห์ Ptolemy 1 เรื่องอำนาจในอียิปต์ ศูนย์กลางการศึกษาคณิตศาสตร์ของกรีก จึงได้กลับมาอยู่ที่ Alexandria อีก เพราะ Ptolemy ทรงจัดตั้งมหาวิทยาลัยขึ้นที่นั่น และพระองค์ทรงโปรดให้สร้างห้องสมุดที่ยิ่งใหญ่ เพราะห้องสมุดนี้มีเอกสารและสิ่งพิมพ์ต่างๆ กว่า 500,000 ชิ้น ในครอบครอง นักคณิตศาสตร์คนดังคนแรกของสถาบันนี้คือ Euclid ผู้เขียนตำราเรขาคณิตเล่มแรกของโลกชื่อ Elements ในตำราเล่มนี้ Euclid ได้รวบรวมความรู้เรขาคณิตของรูปทรงตันและระนาบต่างๆ ทฤษฎีจำนวนและทฤษฎีอัตราส่วนที่โลกมีขณะนั้น หนังสือเล่มนี้จึงจัดเป็นตำราคณิตศาสตร์ที่สำคัญมากที่สุดเล่มหนึ่งของโลก

ส่วน Archimedes ซึ่งเกิดที่เมือง Syracuse บนเกาะ Sicily เมื่อปี พ.ศ. 256 ก็เป็นนักคณิตศาสตร์ผู้ยิ่งใหญ่ที่สุดคนหนึ่งที่ได้เคยเดินทางมาศึกษาที่ Alexandria นี้ เขาเป็นผู้พบวิธีคำนวณหาพื้นที่ผิวรวมทั้งปริมาตรของทรงกลม และทรงกระบอก นอกจากนี้ เขายังพิสูจน์ได้ว่า π มีค่าอยู่ระหว่าง $310/71$ กับ $31/7$ ด้วย และในส่วนของคณิตศาสตร์ประยุกต์นั้น Archimedes ได้พบกฎของคานอยู่ กฎการลอยและจมของวัตถุด้วย ประเทศจีนในสมัยโบราณ ก็มีนักคณิตศาสตร์ที่มีความสามารถสูงเช่นกัน แต่เพราะคนจีนมักบันทึกสิ่งต่างๆ บนกระดาศที่ทำจากเยื่อไม้ไผ่ ดังนั้นหลักฐานต่างๆ จึงได้สูญสลายไปมาก ถึงกระนั้น Zhang Heng ผู้เคยมีชีวิตอยู่เมื่อ 2,400 ปีก่อน ก็ได้พบว่า รากที่สองของ 10 มีค่าประมาณ 3.16 ส่วน Liu Hui นั้น ก็ได้คำนวณพบว่า มีค่าอยู่ระหว่าง 3.1410 กับ 3.1427 เมื่อถึงประมาณปี พ.ศ. 1000 Zu Changzhi ได้ใช้วิธีคำนวณพื้นที่ของรูป 12,288 เหลี่ยม ด้านเท่ากับรูป 24,576 เหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุอยู่ในวงกลม และได้พบว่า มีค่าอยู่ระหว่าง 3.1415926 กับ 3.1415927 เขาจึงได้ประมาณค่า ว่าเท่ากับ $355/113$ ซึ่งก็ถูกต้องถึงทศนิยมบนตำแหน่งที่ 6

ในอินเดียเมื่อ 2,250 ปีก่อน ซึ่งเป็นยุคของอโศกมหาราช ก็เป็นช่วงเวลาที่ยุคคณิตศาสตร์รุ่งเรืองมาก ในตำราพระเวทมีตัวอย่างคณิตศาสตร์ที่แสดงการหารากที่สองของจำนวนต่างๆ และทฤษฎีจำนวนด้วย นักคณิตศาสตร์อินเดียชื่อ Aryabhata ผู้ถือกำเนิดเมื่อ พ.ศ. 67 และ Brahmagupta ซึ่งเกิดเมื่อก่อนพุทธศักราช 55 ปี ได้พบว่า มีค่าประมาณ 3.1416 และ Brahmagupta ได้แก้สมการกำลังสองเช่น $92x^2 + 1 = y^2$ ในกรณีที่ x และ y เป็นเลขจำนวนเต็ม จนพบว่าเมื่อ $x = 120$ จะได้ $y = 1151$ นอกจากนี้ เขายังได้กล่าวถึงวิธีการใช้เลขติดลบ และเลขศูนย์ในการคำนวณด้วย

ในทวีปอเมริกากลาง ซึ่งเป็นดินแดนของอารยธรรมมายา ก็มีการศึกษาคณิตศาสตร์เช่นกัน แต่คณิตศาสตร์ที่ไข่มุกเกี่ยวข้องกับเวลาเช่น ใช้ในการทำปฏิทิน 2 รูปแบบ คือ แบบแรกแบ่ง 1 ปี เป็น 260 วัน และ 1 เดือนมี 20 วัน ส่วนอีกแบบหนึ่งนั้น 1 ปี มี 365 วัน และเท่ากับ 181 เดือน โดย 1 เดือนมี 20 วัน และมีวันพิเศษเพิ่มเติม 5 วัน คนรุ่นหลังล่วงรู้ความสามารถในการนับ และการคำนวณของชาวมายา จากการอ่านลวดลายที่แกะสลักบนเสาหิน หรือกำแพงที่ปรักหักพัง

ในราวปี พ.ศ. 2000 ชาวนิวอิงคา ซึ่งอาศัยอยู่ในประเทศเปรูในอเมริกาใต้ รู้จักสร้าง quipu ซึ่งเป็นเชือกที่มีปมมากมายและตำแหน่งของปมบอกจำนวนและตามปกติชาวนิวอิงคาใช้ quipu ในการทำบัญชีในโลกอาหรับโบราณ ก็มีการศึกษาคณิตศาสตร์เช่นกัน Muhanumad ibn Musa al Khwarizmi คือนักคณิตศาสตร์ชาวเปอร์เซีย ผู้เคยมีชีวิตอยู่ในช่วงปี 1323-1393 ในกรุงแบกแดด เขาเป็นนักคณิตศาสตร์ผู้ริเริ่มสร้างวิชาพีชคณิต โดยเรียกชื่อวิชาว่า al jabr คำนี้ได้แปลมาเป็น algebra ในภาษาอังกฤษ ในเวลาต่อมา Al-Birundi ก็เป็นนักคณิตศาสตร์อาหรับอีกท่านหนึ่ง ผู้มีชื่อเสียงในอีก 200 ปีต่อมา จากผลงานสร้างวิชาตรีโกณมิติและ Nasir al-Din al-Tusi ผู้มีชีวิตในระหว่างปี 1744-1817 ก็เป็นนักคณิตศาสตร์อาหรับอีกท่านหนึ่งที่ได้พัฒนาวิชาตรีโกณมิติและ

ตรรกวิทยา โดยได้พบว่า ถ้า a , b และ c คือด้านของสามเหลี่ยมที่อยู่ตรงข้ามกับมุม A , B และ C ตามลำดับ แล้ว เราจะได้ว่า $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$

ช่วงปี 1000-1500 เป็นระยะเวลาที่ยุโรปกำลังตกอยู่ในยุคมืด เพราะภูมิปัญญาโบราณต่างๆ ถูกทอดทิ้ง และอารยธรรมตกต่ำ แต่ความสนใจในวิทยาการด้านคณิตศาสตร์ก็ยังบังเกิดขึ้นอีกคำรบหนึ่ง เมื่อ Gilbert แห่ง Aurillac (พ.ศ. 1481-1546) นำเลขอาหรับมาใช้ในวงการวิชาการของยุโรป และ Fibonacci แห่งเมือง Pisa ใน อิตาลีได้ใช้วิธีการคำนวณเลขของชาวอาหรับในการเรียบเรียงหนังสือชื่อ Liber a baci ซึ่งแปลว่า ตำราคำนวณ ในปี พ.ศ. 1745 หนังสือเล่มนี้มีโจทย์คณิตศาสตร์และพีชคณิตมากมาย และมีลำดับ Fibonacci (Fibonacci sequence) ด้วย ซึ่งลำดับนี้คือ ชุดเลข 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 โดยตั้งแต่ว่าจำนวนที่ 3 ไปเป็นเลขที่ได้จากการรวมเลข 2 ตัวหน้าที่อยู่ติดกัน เช่น $2 = 1+1$, $5 = 2+3$ และ $34 = 13+21$ เป็นต้น

เมื่อถึงยุคฟื้นฟูศิลปวิทยา (renaissance) ซึ่งเป็นเวลาที่ยุโรปมีการตื่นตัวทางวิชาการมาก เพราะมีการจัดตั้งมหาวิทยาลัย มีการประดิษฐ์เครื่องพิมพ์และการแปลตำราอาหรับเป็นภาษาละติน เช่น ในปี 1631 ได้มีการสร้างมหาวิทยาลัยขึ้นเป็นครั้งแรกที่เมือง Bologna ในอิตาลีให้นักศึกษาเรียนไวยากรณ์ ตรรกวิทยา เลขคณิต เรขาคณิต ดาราศาสตร์ และดนตรี ส่วนตำราที่ใช้คือ Elements ของ Euclid และ Almagest ของ Ptolemy

ส่วนการประดิษฐ์เครื่องพิมพ์ในปี พ.ศ. 1983 โดย Johann Gutenberg นั้นก็ได้ทำให้ผลงานวิชาการต่างๆ แพร่สู่สังคมได้อย่างกว้างขวางและรวดเร็วและนักศึกษาคณิตศาสตร์ในสมัยนั้น ต่างก็ได้อ่านตำราชื่อ Summa de arithmetica geometrica, proportioni et proportionalita ของ Luca Pacioli ซึ่งหนา 600 หน้ากันทุกคน การรู้จักประดิษฐ์เครื่องพิมพ์ จึงทำให้วงการคณิตศาสตร์มีมาตรฐานการใช้สัญลักษณ์ เช่น $+$ - เป็นครั้งแรกในปี พ.ศ. 2032 ตามที่ Johann Widmanna เสนอ และในปี พ.ศ. 2100 Robert Record ก็เป็นนักคณิตศาสตร์คนแรกที่เสนอใช้เครื่องหมาย = แสดงการเท่ากัน ส่วนเครื่องหมาย $\times$ และ $\div$ นั้น William Oughtred และ John Pell คือผู้ที่นำมาใช้เป็นครั้งแรกในปี พ.ศ. 2174 และ 2211 ตามลำดับ และในหนังสือชื่อ De thiende (ที่สิบ) ของ Simon Stevin ก็ได้มีการใช้ทศนิยมเป็นครั้งแรก ส่วนตำราของ Johan de Witt ชาว เนเธอร์แลนด์ ที่ชื่อ Elementa curvarum linearum ก็มีการแสดงวิธีคำนวณแบบเรขาคณิตวิเคราะห์เป็นครั้งแรก ในปี พ.ศ. 2157 นักคณิตศาสตร์ชาวสกอตชื่อ John Napier ได้นำเรื่อง logarithm มาใช้ในการคำนวณเป็นครั้งแรก และเทคนิคนี้ได้ทำให้เกิดอุปกรณ์คำนวณซึ่งเรียกว่า slide rule ในปี พ.ศ. 2173 ทำให้แทบทุกคนในวงการวิชาการสมัยนั้น หันมาใช้อุปกรณ์นี้เป็นเวลานานร่วม 300 ปี จนกระทั่งถึงยุคคอมพิวเตอร์ที่ทุกคนหันมาใช้ pocket calculator (pc) แทน

ในสมัยศตวรรษที่ 22 ประเทศฝรั่งเศสมีนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงมากมายเช่น Rene Descartes, Pierre de Fermat และ Blaise Pascal โดยเฉพาะหนังสือชื่อ Discours de la methode ที่ Rene Descartes เรียบเรียงนั้น ได้มีการนำพีชคณิตมาใช้ในการศึกษาเรขาคณิตเป็นครั้งแรก และมีการวิเคราะห์สมการของ พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลาด้วย ส่วน Pierre de Fermat นั้น ก็สนใจ $x^n + y^n$ ทฤษฎีจำนวนและทฤษฎีบทสุดท้ายของ Fermat ที่ว่า หากมีสมการ $x^n + y^n = z^n$ แล้วเราจะไม่สามารถหาเลข x , y , z ที่เป็นจำนวนเต็มมาแทนในสมการได้ ถ้า n มีค่ามากกว่า 2 ก็ได้รับการพิสูจน์ว่า จริง โดย Andrew Wiles ในปี 2538 Blaise Pascal เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสอีกท่านหนึ่งที่มีผลงานด้านคณิตศาสตร์มากมาย เขาศึกษาโค้ง cycloid ซึ่งเป็นทางเดินของจุดๆ หนึ่งบนเส้นรอบวงของวงกลมที่กลิ้งไปบนพื้นราบโดยไม่ไถล และสร้างทฤษฎีของความเป็นไปได้ (probability)

ความก้าวหน้าทางคณิตศาสตร์ ในช่วงเวลานี้ได้พุ่งสูงสุดเมื่อ Isaac Newton เรียบเรียง Principia mathematica ในปี พ.ศ. 2230 โดย Newton ได้คิดสร้างวิชาแคลคูลัสขึ้นมาอธิบายการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ รอบดวงอาทิตย์ ฯลฯ ถึงแม้ Newton จะอ้างว่าเขาสร้างวิชาแคลคูลัสขึ้นมาเป็นคนแรก แต่ Gottfried Wilhelm Leibniz ก็เป็นบุคคลแรกที่ได้ตีพิมพ์เรื่องนี้ และสัญลักษณ์ต่างๆ ที่ Leibniz ใช้เช่น $\int dx$ นั้น นักคณิตศาสตร์ก็ยังคงใช้กันมาจนทุกวันนี้ แต่ถ้าเราจะนับผลงานกันแล้ว Leonard Euler นักคณิตศาสตร์ชาวสวิสก็ดูจะเป็นคนที่มี

ผลงานมากที่สุด เพราะเขาคือผู้ใช้สัญลักษณ์ e ($= 2.718...$) i ($= \sqrt{-1}$), Σ (=ผลบวก) และ $f(n\infty)$ (ฟังก์ชันของ x) เป็นคนแรก นอกจากนี้ Eulers ก็ยังมีผลงานด้านสมการอนุพันธ์ ทฤษฎีจำนวนและสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชัน exponential คือ $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ ด้วย

การปฏิวัติในฝรั่งเศส และการขึ้นครองอำนาจของ Napoleon Bonaparte (พ.ศ. 2312-2364) ได้ทำให้คณิตศาสตร์รุ่งโรจน์มาก เพราะ Napoleon ทรงสนพระทัยคณิตศาสตร์ การจัดตั้ง Ecole Polytechnique ขึ้นที่ปารีสได้ ทำให้สถาบันมีนักคณิตศาสตร์ระดับเยี่ยมเช่น Laplace, Lagrange และ Cauchy มาฝึกสอนนิสิตและวิจัยหลายคน Carl Friedrich Gauss (พ.ศ. 2320-2398) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันผู้ยิ่งใหญ่ที่สุดคนหนึ่งของโลก เขามีผลงานมากมายจำนวนเชิงซ้อน ($a+bi$ โดยที่ $i^2 = -1$) และยังเป็นผู้ที่สามารถสร้างรูป 17 เหลี่ยมด้านเท่าได้ โดยใช้วงเวียนกับไม้บรรทัดเท่านั้นอีกด้วย กษัตริย์ Oscar ที่ 2 แห่งสวีเดน และนอร์เวย์ (พ.ศ. 2372-2450) เป็นประมุขของประเทศที่สนใจคณิตศาสตร์มาก เมื่อพระองค์ทรงมีพระชนมายุครบ 5 รอบ พระองค์ได้ทรงจัดให้มีการประกวดผลงานทางคณิตศาสตร์ขึ้น และผู้พิชิตรางวัลในครั้งนั้นคือ Henri Poincare ซึ่งได้วิเคราะห์การเคลื่อนที่ของดวงอาทิตย์ โลกและดวงจันทร์อย่างถูกต้อง Poincare เป็นนักคณิตศาสตร์ที่เกือบพบทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษก่อน Einstein Bertrand Russell เป็นนักคณิตศาสตร์ผู้ยิ่งใหญ่อีกคนหนึ่งแห่งศตวรรษที่ 25 เขาเป็นผู้คิดปัญหา Russell paradox ในปี 1945 ซึ่งกล่าวว่า “ในหมู่บ้านแห่งหนึ่งมีช่างตัดผม ผู้ที่ตัดผมให้ทุกคนที่ตัดผมให้ตนเองไม่ได้ ถ้าว่า ใครตัดผมให้ช่างตัดผมคนนั้น”

Srinivasa Ramanujan เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวอินเดียที่ยิ่งใหญ่อีกคนหนึ่ง ซึ่งมีผลงานด้านทฤษฎีจำนวนและการวิเคราะห์ แต่ได้เสียชีวิต ขณะที่มียาญน้อยเพียง 32 ปี และในระหว่างที่นอนพักในโรงพยาบาลนั้น G.H. Hardy แห่งมหาวิทยาลัย Cambridge ไปเยี่ยมและเอ่ยบอก Ramanujan ว่า รถแท็กซี่ที่เขาเดินทางมานั้น มีเลขทะเบียนรถ 1729 ซึ่งไม่น่าสนใจเลย แต่ Ramanujan กลับตอบว่า 1729 เป็นเลขที่น่าสนใจมาก เพราะ $1729 = 103 + 93$ และ $= 13 + 123$

ปี พ.ศ. 2435 อันเป็นปีครบ 400 แห่งการพบทวีปอเมริกาของ Columbus บรรดานักคณิตศาสตร์ได้มีการประชุมเป็นครั้งแรกที่ Chicago และตั้งชื่อการประชุมว่า World Congress of Mathematics การประชุมคราวนั้น มีผู้เข้าประชุม 45 คน แต่เมื่อถึงวันนี้ ทุกครั้งที่มีการประชุม International Congresses of Mathematics จะมีผู้เข้าร่วมประชุมหลายพันคนจากทั่วโลก และเมื่อ 2 ปีก่อนนี้ วงการคณิตศาสตร์มีการจัดตั้งรางวัล Abel ซึ่งเทียบเท่ารางวัลโนเบลทางคณิตศาสตร์ขึ้น นอกจากนี้ก็มีการมอบเหรียญ Fields ให้แก่นักคณิตศาสตร์ที่มีผลงานโดดเด่น และมีอายุน้อยกว่า 35 ปี ทุก 4 ปีด้วย ณ วันนี้นักคณิตศาสตร์ได้เข้ามามีบทบาทในการอธิบายธรรมชาติ ตั้งแต่รูปทรงของดอกทานตะวัน ผลึก เกล็ดหิมะ เกม คอมพิวเตอร์ ฯลฯ จนกระทั่งรูปทรงต่างๆ ทางศิลปะ และจะมีบทบาทมากขึ้นๆ อีกในอนาคต ทั้งนี้คงเป็นเพราะพระเจ้าเป็นนักคณิตศาสตร์ดังที่ Galileo

อย่างไรก็ตาม ผู้บรรยายได้กล่าวไว้เบื้องต้นแล้วว่า การบันทึกการเกิดขึ้นของคณิตศาสตร์ก็มีความแตกต่างกันบ้างเล็กน้อย ดังนั้น จึงต้องนำมากล่าวเพิ่มเติมอีกว่า ประวัติและวิวัฒนาการของคณิตศาสตร์² จากการศึกษาค้นคว้าวิจัยของนักวิทยาศาสตร์ ทำให้พบว่ามีหลากหลายทฤษฎีว่าด้วยการกำเนิดจักรวาล โลก และการเกิดของระบบสุริยะในกลุ่มดาวขนาดใหญ่ที่เรียกว่า แกแล็กซี่ ระบบสุริยะที่เราอาศัยอยู่นี้ในกลุ่มของแกแล็กซี่ของเรา (our galaxy) ซึ่งก็คือทางช้างเผือกที่เราเห็นบนท้องฟ้ายามค่ำคืนกล่าวกันว่ามีกาแล็กซี่ใหญ่ที่เรียกว่า บิกแบง (big bang) ทำให้กลุ่มก๊าซพวยพุ่งออกไปเป็นบริเวณกว้าง และค่อย ๆ รวมตัวกันเป็นดาวเคราะห์ในระบบสุริยะ โลกที่เราอาศัยอยู่นี้มีจุดกำเนิดเมื่อประมาณ 4,600 ล้านปี หลังจากนั้นอีกหลายร้อยล้านปี กลุ่มไอน้ำที่อยู่บนโลกค่อย ๆ จับตัวและเกิดฝนตกครั้งใหญ่ ทำให้มีแหล่งน้ำและมหาสมุทร พัฒนาการของสิ่งมีชีวิตค่อย ๆ ก่อร่างขึ้น จากสิ่งมีชีวิตที่เป็นแบบเซลล์เดียว พัฒนาการมาเป็นพืช และสัตว์ในเวลาต่อมาจนระยะเวลาประมาณห้าร้อยล้านปีที่แล้ว

² <http://www.bright-math.com/index.php/2013-10-15-15-18-58,11> มีนาคม 2558.

มีสิ่งมีชีวิตที่เป็นพืช แพร์หลายและปกคลุมทั่วโลก ขณะเดียวกันพัฒนาการของสัตว์ก็ค่อย ๆ เกิดขึ้น จากสัตว์ที่อาศัยอยู่ในน้ำ เป็นสัตว์เลื้อยคลานประเภทไดโนเสาร์ นก สัตว์เลี้ยงลูกด้วยน้ำนมมีพัฒนาการหลังสุด เมื่อประมาณห้าสิบล้านปีที่แล้วมีสัตว์เลี้ยงลูกด้วยน้ำนมหลากหลายชนิด แม้กระทั่งลิงโบราณก็มีอายุการกำเนิดในช่วงนี้

จากหลักวิวัฒนาการของชาร์ล ดาร์วิน พบว่า วิวัฒนาการของสิ่งมีชีวิตพัฒนาตามสิ่งแวดล้อมเพื่อการอยู่รอด กล่าวกันว่าต้นกำเนิดของมนุษย์น่าจะอยู่ในช่วงระยะเวลาประมาณห้าล้านปีที่แล้ว จากการขุดค้นโครงกระดูกมนุษย์ประวัติศาสตร์ที่มีอายุเก่าแก่ที่สุดที่ชาว ซึ่งคาดคะเนว่ามีอายุประมาณ 1-2 ล้านปีที่แล้ว นักโบราณคดียังขุดค้นพบมนุษย์ปักกิ่งที่ในถ้ำ ไม่ไกลจากกรุงปักกิ่งของจีนในปัจจุบัน และให้ชื่อว่ามีมนุษย์ปักกิ่ง จากการสันนิษฐานอายุของโครงกระดูกน่าจะอยู่ในช่วงราว 7 แสนปีที่แล้ว จากหลักฐานทางประวัติศาสตร์พบว่า มนุษย์ในสมัยนั้นอาศัยอยู่ในถ้ำ วิวัฒนาการความรู้ความสามารถในวิชาการยังไม่มีอะไรมากนัก และด้วยโครงร่างของมนุษย์ที่ไม่มีอาวุธประจำกายที่ดี ความอยู่รอดจึงต้องใช้สมอง ใช้ความรู้ ความสามารถสั่งสมกันมา มิฉะนั้นจะไม่สามารถดำรงเผ่าพันธุ์สืบต่อกันมาได้ การดำรงชีวิตจึงต้องอาศัยศิลปวิทยาการสั่งสมมา เริ่มจากการรู้จักกับการใช้หิน หรือวัสดุธรรมชาติมาทำเครื่องมือ ใช้เป็นอาวุธ สามารถใช้ไฟ จนกระทั่งถึงยุคโลหะ และการสร้างบ้านเรือน ในช่วงห้าแสนปีที่แล้ว วิทยาการต่าง ๆ ยังไม่มีอะไรมาก การดำรงชีวิตภายในถ้ำก็ไม่แตกต่างอะไรกับสัตว์ป่าทั่วไป ใช้ระบบสื่อสารด้วยท่าทาง จนกระทั่งเมื่อประมาณห้าหมื่นปีที่แล้วที่มนุษย์สามารถพัฒนาความรู้จนมีภาษาพูด สามารถสื่อสารถึงกันได้ด้วยคำพูด

หลักฐานอารยธรรมโบราณต่าง ๆ พบว่า มนุษย์เริ่มสั่งสมวิชาการเป็นตัวอักษรแทนคำพูดได้ เมื่อไม่กี่พันปีมานี้เอง ตัวอักษรที่จารึกในหลุมฝังศพฟาโรห์ กษัตริย์อียิปต์โบราณมีอายุในช่วงประมาณห้าพันปี หรือแม้แต่ตัวอักษรรูปภาพของจีนที่ใช้แทนคำพูดก็มีอายุประมาณห้าพันปีเช่นเดียวกัน เมื่อมนุษย์รู้จักกับการใช้ตัวอักษรแทนคำพูด ก็ทำให้การเก็บข้อมูลวิชาการต่าง ๆ เกิดขึ้นได้ มีการจารึกลงบนหิน บนหลักศิลาต่าง ๆ มีการบันทึกลงที่ผาผนัง จนในที่สุดชาวอียิปต์โบราณรู้จักการนำต้นกก (papyrus) มาทำเป็นกระดาษ และชาวจีนก็สามารถสร้างกระดาษจากไม้ไผ่ จากฝ้ายเป็นแผ่นผ้า การจารึกวิชาการต่าง ๆ จึงเริ่มมากขึ้น การบันทึกวิชาการกระทำกันอย่างจริงจัง และมีการเผยแพร่อย่างมากขึ้น มีมาไม่กี่ร้อยปีนี่ หลังจากที่ชาวเยอรมันรู้จักกับการผลิตแท่นพิมพ์พิมพ์หนังสือ การผลิตหนังสือจึงเปลี่ยนจากการเขียนด้วยมือลงบนสมุดข่อย หรือลงบนศิลาหรือผ้า มาเป็นระบบการพิมพ์ที่มีคุณภาพดีกว่าและสามารถพิมพ์ได้เป็นจำนวนมาก การสื่อสารโทรคมนาคมเพื่อเผยแพร่ข่าวสารหรือติดต่อสื่อสารระหว่างกัน เป็นการพัฒนาในยุคต่อมา วิทยาการเริ่มจากมารโคนีสามารถส่งรหัสมอร์สข้ามมหาสมุทรแอตแลนติกได้สำเร็จ จนต่อมามีระบบวิทยุโทรเลข มีโทรศัพท์ และมีการกระจายข่าวสารทางวิทยุโทรทัศน์ ยุคอิเล็กทรอนิกส์เป็นยุคของการกระจายความรู้อย่างมากได้เริ่มขึ้น เมื่อประมาณห้าสิบปีที่แล้วนี้เอง โดยมีการผลิตคอมพิวเตอร์ ผลิตอุปกรณ์สื่อสารข้อมูลต่าง ๆ มากมาย จนในที่สุดกลายเป็นระบบสื่อสารที่สามารถสื่อสารกันได้ทั่วโลก

ในปี พ.ศ. 2534 อินเทอร์เน็ตเริ่มเป็นที่แพร่หลาย มีการพัฒนาเครือข่ายความรู้ที่เรียกว่า เวิร์ลไวด์เว็บ (WWW) และขยายต่อการประยุกต์ใช้งานอย่างกว้างขวางจนมีบทบาทที่สำคัญต่อการเปลี่ยนแปลงวิถีชีวิตบนโลกนี้ วิทยาการในยุคห้าปีหลังนี้จึงเป็นวิทยาการที่มีเครือข่ายของความรู้ต่าง ๆ มีการเชื่อมโยงสร้างโลกจินตนาการที่เรียกว่า ไซเบอร์สเปซ สร้างจินตนาการในลักษณะเสมือน (Virtual) มากมาย วิทยาการความรู้ในปัจจุบันจึงเป็นวิทยาการที่มีความหลากหลาย และมีผลกระทบต่อการเรียนรู้ในยุคใหม่มาก

ตารางที่ 1 พัฒนาการทางด้านวิทยาการและการถ่ายทอดความรู้ของมนุษย์

ระยะเวลา	ลักษณะที่สำคัญ
5000 ล้านปี	โลกเกิดขึ้นเป็นส่วนหนึ่งของระบบสุริยะ

500 ล้านปี	มีสิ่งมีชีวิตบนโลก
50 ล้านปี	มีสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม
5 ล้านปี	เริ่มมีมนุษย์บนโลก
500000 ปี	มนุษย์อาศัยในถ้ำ สื่อสารด้วยท่าทาง
50000 ปี	มีความรู้ ความเข้าใจการใช้ภาษาพูดสื่อสาร
5000 ปี	มีการสร้างตัวหนังสือ บันทึกเรื่องราวต่าง ๆ
500 ปี	สามารถพิมพ์หนังสือได้
50 ปี	ก้าวเข้าสู่ยุคอิเล็กทรอนิกส์ มีคอมพิวเตอร์ระบบสื่อสารโทรคมนาคม
5 ปี	อินเทอร์เน็ตเป็นที่แพร่หลาย

จากตารางที่ 1 เห็นได้ชัดว่าพัฒนาการทางด้านวิทยาการ มีวิวัฒนาการมายาวนาน แต่ในช่วงหลังเพียงไม่กี่ปีนี้ วิชาการต่าง ๆ ได้พัฒนาไปมาก มีการใช้เทคโนโลยีที่เกี่ยวข้องกับการประมวลผลคอมพิวเตอร์คือระบบคอมพิวเตอร์เพื่อเก็บรวบรวมข้อมูลข่าวสาร ประมวลผล แยกแยะ รวมถึงการผลิตข่าวสารต่าง ๆ ใช้เทคโนโลยีสื่อสารโทรคมนาคมเพื่อการขนส่งและโอนย้าย กระจายข่าวสารไปยังที่ต่าง ๆ ได้อย่างรวดเร็ว

ปัจจุบันคณิตศาสตร์ได้ถูกพัฒนามาก ซึ่งหากผู้ที่สนใจอยากรู้ว่าคณิตศาสตร์มีประวัติความเป็นมาอย่างไร มีอะไรมาไกลกว่าตัวเลข ก็คงบอกได้แต่เพียงว่า ต้องติดตามกันต่อไป อย่างไรก็ตาม คำจำกัดความนี้สามารถชี้ให้เห็นถึงรากฐาน และที่มาของคณิตศาสตร์ได้อย่างชัดเจน นั่นก็คือ ตัวเลข นั่นเอง คณิตศาสตร์เริ่มจากเป็นเกร็ดความรู้ที่มนุษย์นำมาใช้ให้เป็นประโยชน์ในการดำรงชีวิตในสมัยสี่พันปีก่อนค่อยๆ มีกฎเกณฑ์ทวีเพิ่มพูนขึ้นตลอดมา คณิตศาสตร์เปรียบเหมือนต้นไม้ นับวันจะผลิดอกออกผลนำประโยชน์มาให้มนุษยชาติ มนุษย์ทุกยุคทุกสมัยสนใจวิชาคณิตศาสตร์ การให้ความรู้ทางคณิตศาสตร์แก่เยาวชนของชาติ จึงมีความสำคัญอย่างมาก

ระบบจำนวนจึงเป็นเรื่องของธรรมชาติที่มนุษย์ต้องการใช้ในการนับจำนวน เพื่อจะได้ทราบปริมาณ และเปรียบเทียบค่า หรือใช้ประโยชน์ในชีวิตประจำวันได้มากมายมหาศาล ความเป็นอยู่ของผู้คนเกี่ยวข้องกับการทำการเกษตร การเพาะปลูก เมื่อดำเนินการตั้งถิ่นที่อยู่อาศัย ก็ต้องมีการคำนวณพื้นที่ มีการเรียนรู้เรื่องเวลาและฤดูกาล เมื่อเพาะปลูกได้ก็ต้องรับรู้ปริมาณผลผลิตที่ได้รับ จึงมีการตวงข้าวสาลี ข้าวบาร์เลย์ และเป็นที่มาของมาตราต่าง ๆ ที่ใช้ ชีวิตความเป็นอยู่ของชนทุกชาติจะคุ้นเคยกับหน่วยปริมาณ และมาตราวัดที่แตกต่างกันออกไป

ชาวไทยคุ้นเคยกับมาตราวัดระยะทางแบบ คืบ ศอก วา เส้น มาก่อน ทำให้หน่วยวัดพื้นที่เป็นไร่ เป็นงาน อย่างไรก็ตามหน่วยวัดปริมาตรของไทยที่คุ้นเคยเดิมคือเป็นถัง เกวียน หรือแม้แต่การแบ่งเวลาก็มีการแบ่งเป็นโมง เป็นยามในแต่ละชาติ แต่ละภาษาจึงมีมาตรฐานปริมาณของตนเอง มีหน่วยเงินตรา หรือหน่วยใช้ในชีวิตประจำวันต่าง ๆ ที่แตกต่างกัน แต่เมื่อมีการคบค้าสมาคมกันระหว่างประเทศ มีการค้าขายแลกเปลี่ยน ทำให้การดำเนินชีวิตที่ต้องมีมาตรฐานกลาง หรือหน่วยวัดกลางและเป็นที่ยอมรับกันทั่วโลก แนนอนทีเดียวกว่าแต่ละประเทศย่อมมีสัญลักษณ์แทนตัวเลขที่แตกต่างกันไป จึงขอเริ่มต้นประวัติศาสตร์ของคณิตศาสตร์ด้วยตัวเลขที่แต่ละอารยธรรมคิดค้นขึ้นแต่ละยุคสมัย

"คณิตศาสตร์"³ คืออะไร คำถามง่ายๆ ที่ตอบยาก..คณิตศาสตร์ชื่อย่อ: Mathematics คณิตศาสตร์ เป็นศาสตร์ที่มุ่งค้นคว้าเกี่ยวกับ โครงสร้างนามธรรมที่ถูกกำหนดขึ้นผ่านทางกลุ่มของสัจพจน์ซึ่งมีการให้เหตุผล ที่แน่นอนโดยใช้ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ และสัญกรณ์คณิตศาสตร์ เรามักนิยามโดยทั่วไปว่าคณิตศาสตร์เป็นสาขาวิชา

³ นายเสรี สุขโยธิน แหล่งที่มา : จากวิกิพีเดีย สารานุกรมเสรี ,www.gotoknow.org/posts/420363,

ที่ศึกษาเกี่ยวกับรูปแบบและ โครงสร้าง, การเปลี่ยนแปลง, และปริภูมิ กล่าวคร่าวๆ ได้ว่าคณิตศาสตร์นั้นสนใจ "รูปร่างและจำนวน." เนื่องจากคณิตศาสตร์มิได้สร้างความรู้ผ่านกระบวนการทดลอง บางคนจึงไม่จัดว่าคณิตศาสตร์เป็นสาขาของวิทยาศาสตร์

คำว่า "คณิตศาสตร์" (คำอ่าน: คะ-นิต-ตะ-สาด) มาจากคำว่า คณิต (การนับ หรือ คำนวณ) และ ศาสตร์ (ความรู้ หรือ การศึกษา) ซึ่งรวมกันมีความหมายโดยทั่วไปว่า การศึกษาเกี่ยวกับการคำนวณ หรือ วิชาที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณ. คำนี้ตรงกับคำภาษาอังกฤษว่า mathematics มาจากคำภาษากรีก (mathema) แปลว่า "วิทยาศาสตร์, ความรู้, และการเรียน" และคำว่า (mathematiks) แปลว่า "รักที่จะเรียนรู้". ในอเมริกาเหนือนิยมย่อ mathematics ว่า math ส่วนประเทศอื่นๆ ที่ใช้ภาษาอังกฤษนิยมย่อว่า maths ความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอ ผ่านทางการวิจัยและการประยุกต์ใช้ คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมืออันหนึ่งของวิทยาศาสตร์ อย่างไรก็ตาม การคิดค้นทางคณิตศาสตร์ไม่จำเป็นต้องมีเป้าหมายอยู่ที่การนำไปใช้ทางวิทยาศาสตร์ (ดู คณิตศาสตร์บริสุทธิ์ และคณิตศาสตร์ประยุกต์)

โครงสร้างต่างๆ ที่นักคณิตศาสตร์สนใจและพิจารณานั้น มักจะมีต้นกำเนิดจากวิทยาศาสตร์ธรรมชาติ และสังคมศาสตร์ โดยเฉพาะฟิสิกส์ และเศรษฐศาสตร์. ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน ยังเกี่ยวข้องกับการประยุกต์ใช้ในสาขาวิทยาการคอมพิวเตอร์ และทฤษฎีการสื่อสาร อีกด้วย เนื่องจากคณิตศาสตร์นั้นใช้ตรรกศาสตร์ สัญลักษณ์และสัญกรณ์คณิตศาสตร์ ซึ่งทำให้กิจกรรมทุกอย่างกระทำผ่านทางขั้นตอนที่ชัดเจน เราจึงสามารถพิจารณาคณิตศาสตร์ว่าเป็นระบบภาษาที่เพิ่มความแม่นยำและชัดเจนให้กับภาษาธรรมชาติ ผ่านทางศัพท์และไวยากรณ์บางอย่าง สำหรับการอธิบายและศึกษาความสัมพันธ์ทั้งทางกายภาพและนามธรรม. ความหมายของคณิตศาสตร์นั้นยังมีอีกหลายมุมมอง ซึ่งหลายอันถูกกล่าวถึงในบทความเกี่ยวกับปรัชญาของคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ยังถูกจัดว่าเป็นศาสตร์สมบูรณ์ โดยจำไม่จำเป็นต้องมีการอ้างถึงใดๆ จากโลกภายนอก. นักคณิตศาสตร์กำหนดและพิจารณาโครงสร้างบางประเภท สำหรับใช้ในคณิตศาสตร์เองโดยเฉพาะ, เนื่องจากโครงสร้างเหล่านี้ อาจทำให้สามารถอธิบายสาขาย่อยๆ หลายๆ สาขาได้ในภาพรวม หรือเป็นประโยชน์ในการคำนวณพื้นฐาน

นอกจากนี้ นักคณิตศาสตร์หลายคนก็ทำงานเพื่อเป้าหมายเชิงสุนทรียภาพเท่านั้น โดยมองว่าคณิตศาสตร์เป็นศาสตร์เชิงศิลปะ มากกว่าที่จะเป็นศาสตร์เพื่อการนำไปประยุกต์ใช้ (ดังเช่น จี. เอช. ฮาร์ดี ที่ได้กล่าวไว้ในหนังสือ A Mathematician's Apology); แร้งผลักดันในการทำงานเช่นนี้ มีลักษณะไม่ต่างไปจากที่กวีและนักปรัชญาได้ประสบ และเป็นสิ่งที่ไม่สามารถอธิบายได้. อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ กล่าวว่า คณิตศาสตร์เป็นราชินีของวิทยาศาสตร์ ในหนังสือ Ideas and Opinions ของเขา องค์ความรู้ในคณิตศาสตร์รวมกันเป็นสาขาวิชาหลักการเบื้องต้นที่เริ่มจากเลขคณิตไปยังการประยุกต์ใช้งานพื้นฐานของสาขา คณิตศาสตร์ ที่รวมพีชคณิต เรขาคณิต ตรรกศาสตร์ สถิติศาสตร์ และแคลคูลัส เป็นหลักสูตรแกนในการศึกษาขั้นพื้นฐาน แม้ว่าจะได้มีการพัฒนาและขยายขอบเขตไปอย่างมากมายในช่วงเวลาหลายร้อยปี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ยังคงถูกจัดว่าเป็นสาขาวิชาเดียวที่มีลักษณะแตกต่างจากสาขา อื่น ๆ

ประวัติของคณิตศาสตร์ซึ่งอาจารย์สุทัศน์ ยกส้าน⁴ ได้กล่าวว่า ช่วงปี 1000-1500 เป็นระยะเวลาที่ยุโรปกำลังตกอยู่ในยุคมืด เพราะภูมิปัญญาโบราณต่างๆ ถูกทอดทิ้ง และอารยธรรมตกต่ำ แต่ความสนใจในวิทยาการด้านคณิตศาสตร์ก็ยังบังเกิดขึ้นอีกคำรบหนึ่ง เมื่อ Gilbert แห่ง Aurillac (พ.ศ. 1481-1546) นำเลขอาหรับมาใช้ในการวงการวิชาการของยุโรป และ Fibonacci แห่งเมือง Pisa ในอิตาลีได้ใช้วิธีการคำนวณเลขของชาวอาหรับในการเรียบเรียงหนังสือชื่อ Liber a baci ซึ่งแปลว่า ตำราคำนวณในปี พ.ศ. 1745 หนังสือเล่มนี้มีใจหายคณิตศาสตร์และพีชคณิตมากมาย และมีลำดับ Fibonacci (Fibonacci sequence) ด้วย ซึ่งลำดับนี้คือ ชุดเลข 1, 1, 2, 3, 5, 8,

⁴ แหล่งที่มา : จากวิกิพีเดีย สารานุกรมเสรี ,www.gotoknow.org/posts/420363,

13, 21, 34 โดยตั้งแต่นับจำนวนที่ 3 ไปเป็นเลขที่ได้จากการรวมเลข 2 ตัวหน้าที่อยู่ติดกัน เช่น $2 = 1+1$, $5 = 2+3$ และ $34 = 13+21$ เป็นต้น

เมื่อถึงยุคฟื้นฟูศิลปวิทยา (renaissance) ซึ่งเป็นเวลาที่ยุโรปมีการตื่นตัวทางวิชาการมาก เพราะมีการจัดตั้งมหาวิทยาลัย มีการประดิษฐ์เครื่องพิมพ์และมีการแปลตำราอาหรับเป็นภาษาละติน เช่น ในปี 1631 ได้มีการสร้างมหาวิทยาลัยขึ้นเป็นครั้งแรกที่เมือง Bologna ในอิตาลีให้นักศึกษาเรียนไวยากรณ์ ตรรกวิทยา เลขคณิต เรขาคณิต ดาราศาสตร์ และดนตรี ส่วนตำราที่ใช้คือ Elements ของ Euclid และ Almagest ของ Ptolemy ส่วนการประดิษฐ์เครื่องพิมพ์ในปี พ.ศ. 1983 โดย Johann Gutenberg นั้นก็ได้ทำให้ผลงานวิชาการต่างๆ แพร่สู่สังคมได้อย่างกว้างขวางและรวดเร็วและนักศึกษาคณิตศาสตร์ในสมัยนั้น ต่างก็ได้อ่านตำราชื่อ Summa de arithmetica geometrica, proportioni et proportionalita ของ Luca Pacioli ซึ่งหนา 600 หน้ากันทุกคน การรู้จักประดิษฐ์เครื่องพิมพ์ จึงทำให้วงการคณิตศาสตร์มีมาตรฐานการใช้สัญลักษณ์ เช่น $+$ $-$ เป็นครั้งแรกในปี พ.ศ. 2032 ตามที่ Johann Widmanna เสนอ และในปี พ.ศ. 2100 Robert Record ก็เป็นนักคณิตศาสตร์คนแรกที่เสนอใช้เครื่องหมาย $=$ แสดงการเท่ากัน ส่วนเครื่องหมาย $\times$ และ $?$ นั้น William Oughtred และ John Pell คือผู้ที่นำมาใช้เป็นครั้งแรกในปี พ.ศ. 2174 และ 2211 ตามลำดับ และในหนังสือชื่อ De thiende (ที่สิบ) ของ Simon Stevin ก็ได้มีการใช้ทศนิยมเป็นครั้งแรก ส่วนตำราของ Johan de Witt ชาวเนเธอร์แลนด์ ที่ชื่อ Elementa curvarum linearum ก็มีการแสดงวิธีคำนวณแบบเรขาคณิตวิเคราะห์เป็นครั้งแรก

ในปี พ.ศ. 2157 นักคณิตศาสตร์ชาวสกอตชื่อ John Napier ได้นำเรื่อง logarithm มาใช้ในการคำนวณเป็นครั้งแรก และเทคนิคนี้ได้ทำให้เกิดอุปกรณ์คำนวณซึ่งเรียกว่า slide rule ในปี พ.ศ. 2173 ทำให้แทบทุกคนในวงการวิชาการสมัยนั้น หันมาใช้อุปกรณ์นี้เป็นเวลานานร่วม 300 ปี จนกระทั่งถึงยุคคอมพิวเตอร์ที่ทุกคนหันมาใช้ pocket calculator (pc) แทน ในสมัยศตวรรษที่ 22 ประเทศฝรั่งเศสมีนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงมากมายเช่น Rene Desceutes, Pierre de Fermat และ Blaise Pascal โดยเฉพาะหนังสือชื่อ Discours de la methode ที่ Reni Descartes เรียบเรียงนั้น ได้มีการนำพีชคณิตมาใช้ในการศึกษาเรขาคณิตเป็นครั้งแรก และมีการวิเคราะห์สมการของพาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลาด้วย ส่วน Pierre de Fermat นั้น ก็สนใจ $x^n + y^n = z^n$ ทฤษฎีจำนวนและทฤษฎีบทสุดท้ายของ Fermat ที่ว่า หากมีสมการ $x^n + y^n = z^n$ แล้วเราจะไม่สามารถหาเลข x, y, z ที่เป็นจำนวนเต็มมาแทนในสมการได้ ถ้า n มีค่ามากกว่า 2 ก็ได้รับการพิสูจน์ว่า จริง โดย Andrew Wiles ในปี 2538 Blaise Pascal เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสอีกท่านหนึ่งที่มีผลงานด้านคณิตศาสตร์มากมาย เขาศึกษาโค้ง cycloid ซึ่งเป็นทางเดินของจุดๆ หนึ่งบนเส้นรอบวงของวงกลมที่กลิ้งไปบนพื้นราบโดยไม่ไถล และสร้างทฤษฎีของความน่าจะเป็นไปได้ (probability)

ความก้าวหน้าทางคณิตศาสตร์ ในช่วงเวลานี้ได้พุ่งสูงสุดเมื่อ Isaac Newton เรียบเรียง Principia mathematica ในปี พ.ศ. 2230 โดย Newton ได้คิดสร้างวิชาแคลคูลัสขึ้นมาอธิบายการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ รอบดวงอาทิตย์ ฯลฯ ถึงแม้ Newton จะอ้างว่าเขาสร้างวิชาแคลคูลัสขึ้นมาเป็นคนแรก แต่ Gottfried Wilhelm Leibniz ก็เป็นบุคคลแรกที่ได้ตีพิมพ์เรื่องนี้ และสัญลักษณ์ต่างๆ ที่ Leibniz ใช้เช่น dx นั้น นักคณิตศาสตร์ก็ยังคงใช้กันมาจนทุกวันนี้ แต่ถ้าเราจะนับผลงานกันแล้ว Leonard Euler นักคณิตศาสตร์ชาวสวิสก็ดูจะเป็นคนที่มีผลงานมากที่สุด เพราะเขาคือผู้ใช้สัญลักษณ์ e ($= 2.718...$) i ($= \sqrt{-1}$), γ (=ผลบวก) และ $\zeta(n)$ (ฟังก์ชันของ x) เป็นคนแรก นอกจากนี้ Eulers ก็ยังมีผลงานด้านสมการอนุพันธ์ ทฤษฎีจำนวนและสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชัน exponential คือ $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ ด้วย

การปฏิวัติในฝรั่งเศส และการขึ้นครองอำนาจของ Napoleon Bonaparte (พ.ศ. 2312-2364) ได้ทำให้คณิตศาสตร์รุ่งโรจน์มาก เพราะ Napoleon ทรงสนพระทัยคณิตศาสตร์ การจัดตั้ง Ecole Polytechnique ขึ้นที่ ปารีสได้ ทำให้สถาบันมีนักคณิตศาสตร์ระดับเยี่ยมเช่น Laplace, Lagrange และ Cauchy มาฝึกสอนนิสิตและวิจัยหลายคน Carl Friedrich Gauss (พ.ศ. 2320-2398) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันผู้ยิ่งใหญ่ที่สุดคนหนึ่ง

ของโลก เขามีผลงานมากมายจำนวนเชิงซ้อน ($a+bi$ โดยที่ $i^2 = -1$) และยังเป็นผู้ที่สามารถสร้างรูป 17 เหลี่ยมด้านเท่าได้ โดยใช้วงเวียนกับไม้บรรทัดเท่านั้นอีกด้วย

กษัตริย์ Oscar ที่ 2 แห่งสวีเดน และนอร์เวย์ (พ.ศ. 2372-2450) เป็นประมุขของประเทศที่สนใจคณิตศาสตร์มาก เมื่อพระองค์ทรงมีพระชนมายุครบ 5 รอบ พระองค์ได้ทรงจัดให้มีการประกวดผลงานทางคณิตศาสตร์ขึ้น และผู้พิชิตรางวัลในครั้งนั้นคือ Henri Poincare ซึ่งได้วิเคราะห์การเคลื่อนที่ของดวงอาทิตย์ โลก และดวงจันทร์อย่างถูกต้อง Poincare เป็นนักคณิตศาสตร์ที่เกือบพบทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษก่อน Einstein Bertrand Russell เป็นนักคณิตศาสตร์ผู้ยิ่งใหญ่อีกคนหนึ่งแห่งศตวรรษที่ 25 เขาคือผู้คิดปัญหา Russell paradox ในปี 2445 ซึ่งกล่าวว่า “ในหมู่บ้านแห่งหนึ่งมีช่างตัดผม ผู้ที่ตัดผมให้ทุกคนที่ตัดผมให้ตนเองไม่ได้ ถามว่า ใครตัดผมให้ช่างตัดผมคนนั้น”

Srinivasa Ramanujan เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวอินเดียที่ยิ่งใหญ่อีกคนหนึ่ง ซึ่งมีผลงานด้านทฤษฎีจำนวนและการวิเคราะห์ แต่ได้เสียชีวิต ขณะที่มียาอยู่น้อยเพียง 32 ปี และในระหว่างที่นอนพักในโรงพยาบาลนั้น G.H. Hardy แห่งมหาวิทยาลัย Cambridge ไปเยี่ยมและเอ่ยบอก Ramanujan ว่า รถแท็กซี่ที่เขาเดินทางมานั้น มีเลขทะเบียนรถ 1729 ซึ่งไม่น่าสนใจเลย แต่ Ramanujan กลับตอบว่า 1729 เป็นเลขที่น่าสนใจมาก เพราะ $1729 = 103 + 93$ และ $= 13 + 123$

ปี พ.ศ. 2435 อันเป็นปีครบ 400 แห่งการพบทวีปอเมริกาของ Columbus บรรดานักคณิตศาสตร์ได้มีการประชุมเป็นครั้งแรกที่ Chicago และตั้งชื่อการประชุมว่า World Congress of Mathematics การประชุมคราวนั้น มีผู้เข้าประชุม 45 คน แต่เมื่อถึงวันนี้ ทุกครั้งที่มีการประชุม International Congresses of Mathematics จะมีผู้เข้าร่วมประชุมหลายพันคนจากทั่วโลก และเมื่อ 2 ปีก่อนนี้ วงการคณิตศาสตร์มีการจัดตั้งรางวัล Abel ซึ่งเทียบเท่ารางวัลโนเบลทางคณิตศาสตร์ขึ้น นอกจากนี้ก็มีการมอบเหรียญ Fields ให้แก่นักคณิตศาสตร์ที่มีผลงานโดดเด่น และมีอายุน้อยกว่า 35 ปี ทุก 4 ปีด้วย ณ วันนี้นักคณิตศาสตร์ได้เข้ามามีบทบาทในการอธิบายธรรมชาติ ตั้งแต่รูปทรงของดอกทานตะวัน ผลึก เกล็ดหิมะ เกม คอมพิวเตอร์ ฯลฯ จนกระทั่งรูปทรงต่างๆ ทางศิลปะ และจะมีบทบาทมากขึ้นๆ อีกในอนาคต ทั้งนี้คงเป็นเพราะพระเจ้าเป็นนักคณิตศาสตร์ดังที่ Galileo คิดครับ

เส้นเวลาของคณิตศาสตร์

สมัยกรีก อียิปต์และก่อนหน้า

530 ก่อน ค.ศ. - พิทาโกรัส ศึกษาและคิดค้นเรขาคณิต รวมทั้งนำคณิตศาสตร์มาใช้อธิบายการสั่นของเส้นเชือก นอกจากนี้ลูกศิษย์ของเขายังได้ค้นพบจำนวนอตรรกยะจากรากที่สองของ 2 (มีเรื่องเล่ากันว่าพิทาโกรัสผู้ซึ่งบูชาตัวเลขตั้งพระเจ้า ตกใจมากกับการค้นพบตัวเลขซึ่งไม่สามารถแทนได้ด้วยเศษส่วนนี้ จึงสั่งให้ลูกศิษย์เช่นไฮวั วัว 100 ตัวในการขอขมาที่ไปพบกับความลับของพระเจ้า),

370 ก่อน ค.ศ. - ยูโดซุสแห่งไซนุส คิดค้น method of exhaustion ซึ่งเป็นวิธีที่ทรงพลังในการหาพื้นที่ของรูปเรขาคณิต ซึ่งเป็นเทคนิคที่อาร์คิมิดีสเชี่ยวชาญมากในเวลาต่อมา และเป็นหนึ่งในรากฐานสำคัญของแคลคูลัส,

350 ก่อน ค.ศ. - อริสโตเติล คิดค้นตรรกศาสตร์หรือศาสตร์แห่งการให้เหตุผลในตำรา Organon,

300 ก่อน ค.ศ. - ยุคลิด เขียนตำราเรขาคณิตชื่อ อีลีเมนทส์ ซึ่งเป็นตำราที่นักคณิตศาสตร์ทั้งในอดีตและปัจจุบันยกย่องว่า สมบูรณ์ใกล้เคียงกับคณิตศาสตร์สมัยใหม่มาก โดยใช้วิธีการทางสัจพจน์เป็นฐานของทฤษฎีบททั้งหมด ภายในนั้นมีบทพิสูจน์ว่าจำนวนเฉพาะมีไม่จำกัด (เป็นจำนวนอนันต์) รวมทั้งขั้นตอนวิธีแบบยุคลิด และการพิสูจน์ทฤษฎีบทมูลฐานของเลขคณิต นักประวัติศาสตร์ชาวยุโรปบางท่านกล่าวว่าตำราเล่มนี้เป็นหนังสือที่มีผู้อ่านมากที่สุดในประวัติศาสตร์ของมนุษยชาติรองมาจากคัมภีร์ไบเบิล,

260 ก่อน ค.ศ. - อาร์คิมิดีส คำนวณค่า ? ได้ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่สอง โดยใช้ method of exhaustion ของยูโดซุส จากการประมาณรูปวงกลมด้วยรูปหลายเหลี่ยมทั้งภายนอกและภายในวงกลมนั้น แล้วใช้

ทฤษฎีบทพีทาโกรัสในการประมาณความยาวของเส้นรอบวง โดยอาร์คิมิดีสสามารถคำนวณความยาวรอบรูปของรูป 96 เหลี่ยม (เพื่อใช้ประมาณแทนรูปวงกลม) ได้ทั้งๆ ที่ยังไม่มียระบบตัวเลขฮินดู-อารบิกและพีชคณิต นอกจากนี้ อาร์คิมิดีสยังได้แสดงการคำนวณพื้นที่ใต้รูปพาราโบลาโดยใช้ method of exhaustion อีกเช่นกัน

240 ก่อน ค.ศ. - เอราทอสเทนีส คิดค้นตะแกรงของเอราทอสเทนีส ซึ่งเป็นอัลกอริทึมที่ใช้หาจำนวนเฉพาะได้อย่างรวดเร็ว (ในสมัยนั้น)

225 ก่อนค.ศ. - อพอลโลนีอุสแห่งเปอร์จา เขียนตำรา On Conic Sections ซึ่งศึกษาเกี่ยวกับภาคตัดกรวยในรูปแบบต่างๆ ไม่ว่าจะเป็น วงรี พาราโบลา หรือ ไฮเพอร์โบลา,

140 ก่อนค.ศ. - อิบปาซุส วางรากฐานของตรีโกณมิติ, ประมาณ ค.ศ. 200 - ทอเลมีแห่งอเล็กซานเดรีย เขียนตำรา อัลมาเกส (ภาษาละติน: Almagest แปลว่า หนังสือที่ยิ่งใหญ่) ซึ่งเป็นตำราดาราศาสตร์ที่สำคัญที่สุดในยุคนั้น และได้รับการยกย่องมากในยุคกลางโดยนักคณิตศาสตร์มุสลิม,

ค.ศ. 250 - ไดโอแฟนตัส เขียนหนังสือ Arithmetica ซึ่งเป็นตำราฉบับแรกที่พูดถึงระบบพีชคณิตสมัยอาหรับ (ยุคกลาง)

ค.ศ. 400 - ค.ศ. 550 - นักคณิตศาสตร์ฮินดูสร้างสัญลักษณ์แทนเลขศูนย์ ในระบบตัวเลข,

ค.ศ. 750 - อัล-ควาริสมิ นักคณิตศาสตร์มุสลิมผู้ซึ่งได้ชื่อว่าเป็นบิดาแห่งพีชคณิต คิดค้นทฤษฎีเกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้น และระบบสมการกำลังสอง และชื่อของเขาเป็นที่มาของคำว่า อัลกอริทึม ที่ใช้กันในปัจจุบัน ยุคฟื้นฟูศิลปวิทยาการ (เรอเนซองส์)

ค.ศ. 1520 - สคิปิโอน เดล เฟอโร คิดค้นคำตอบในรูปแบบราก ของสมการกำลังสาม แบบลดรูป (คือสมการกำลังสาม ที่สัมประสิทธิ์ของเทอม $\times 2$ เท่ากับ 0) ได้สำเร็จ แต่ว่าไม่ได้ตีพิมพ์ผลงานนี้ และได้ถ่ายทอดให้กับลูกศิษย์คนสนิทชื่อ "อันโตนิโอ ฟิโอ" คนเดียวเท่านั้น

ค.ศ. 1535 - อันโตนิโอ ฟิโอ ซึ่งได้รับถ่ายทอดเทคนิคจาก เดล เฟอโร ได้ทำ นิคโคโล ฟอนตาน่า หรือ ทาร์ทาเลีย แข่งทำโจทย์คณิตศาสตร์ โดยต่างคนต่างให้โจทย์อีกฝ่ายคนละ 30 ข้อ โดยฟิโอได้ให้ทาร์ทาเลียทำ โจทย์สมการกำลังสาม ลดรูปทั้งหมด 30 ข้อ และในที่สุด ทาร์ทาเลียก็คิดค้นคำตอบในรูปแบบรากได้เช่นเดียวกันกับ เดล เฟอโร และขณะการแข่งขันครั้งนั้น อย่างไรก็ตาม ทาร์ทาเลียก็ไม่ได้ตีพิมพ์ผลงานชิ้นนี้เช่นกัน

ค.ศ. 1539 - จิโรลาโม คาร์ดาโน เรียนรู้วิธีการหาคำตอบสมการกำลังสามลดรูปจากทาร์ทาเลีย และในเวลาต่อมา คาร์ดาโนก็สามารถคิดค้นวิธีหาคำตอบในรูปแบบรากของสมการกำลังสามแบบสมบูรณ์ ได้

ค.ศ. 1540 - โลโดวิโค เฟอรารีซึ่งเป็นลูกศิษย์ของคาร์ดาโน คิดค้นวิธีหาคำตอบในรูปแบบรากของสมการกำลังสี่ ได้สำเร็จ

ค.ศ. 1614 - จอห์น นาเปียร์ คิดค้นลอการิทึมได้สำเร็จหลังจากทุ่มเทมานับสิบปี และตีพิมพ์ผลงานนี้ใน Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio

ค.ศ. 1619 - เรอเน เดส์การตส์ และ ปีแยร์ เดอ แฟร์มาต์ คิดค้นเรขาคณิตวิเคราะห์ได้ ในเวลาใกล้เคียงกัน

ค.ศ. 1629 - ปีแยร์ เดอ แฟร์มาต์ ได้คิดค้นรากฐานบางส่วนของแคลคูลัสอนุพันธ์

ค.ศ. 1637 - ปีแยร์ เดอ แฟร์มาต์ ได้จดบันทึกเล็กๆ ในหนังสือ Arithmetica ของไดโอแฟนตัสว่า ผมสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ได้ แต่ว่าที่ว่างตรงนั้นมันน้อยเกินไปที่จะเขียนบทพิสูจน์ ทฤษฎีบทที่ว่านี้ก็คือ ทฤษฎีบทสุดท้ายของแฟร์มาต์ซึ่งไม่มีใครพิสูจน์ได้เลยเป็นเวลานานเกือบ 400 ปี จนกระทั่งแอนดรูว์ ไวล์ได้ให้บทพิสูจน์ในปี ค.ศ. 1995

ค.ศ. 1654 - แบลส์ ปาสกาล และ ปีแยร์ เดอ แฟร์มาต์ ได้ร่วมมือกันคิดค้นรากฐานของทฤษฎีความน่าจะเป็น

คริสต์ศตวรรษที่ 17 และ 18 (ยุคคลาสสิก)

ค.ศ. 1665 - ไอแซก นิวตัน พิสูจน์ทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส และสร้างแคลคูลัสขึ้นมาเพื่อแก้ปัญหาทางกลศาสตร์ในฟิสิกส์ โดยนิวตันเรียกแคลคูลัสว่า วิธีแห่งการเปลี่ยนแปลง

ค.ศ. 1671 - เจมส์ เกรกอรี คิดค้นอนุกรมอนันต์ในการแทนฟังก์ชันผกผันของแทนเจนต์ซึ่งเป็นอนุกรมอนันต์ ที่มีการนำไปประยุกต์ใช้อย่างแพร่หลาย เช่น นำไปใช้คำนวณค่า ?

ค.ศ. 1673 - กอทท์ฟรีด วิลเฮล์ม ไลบ์นิซ ประดิษฐ์แคลคูลัสของเขาเองโดยไม่ขึ้นกับของนิวตัน แคลคูลัสของไลบ์นิซนั้นมีรากฐานมาจากคณิตศาสตร์บริสุทธิ์โดยตรงซึ่งต่างจาก นิวตันที่มีรากฐานมาจากการประยุกต์ใช้ในโลกแห่งความเป็นจริง โดยประเด็นที่ว่าใครเป็นผู้คิดค้นแคลคูลัสเป็นคนแรกนั้นถูกถกเถียงกันมานาน นับศตวรรษ ชื่อ แคลคูลัส มาจากฝั่งของไลบ์นิซ นอกจากนั้นสัญลักษณ์ทางแคลคูลัสในคณิตศาสตร์ปัจจุบันเราก็ใช้ของไลบ์นิซ เนื่องจากเป็นสัญลักษณ์ที่ช่วยให้จดจำกฎต่างๆ ของแคลคูลัสได้ง่ายกว่า (ในทำนองเดียวกันกับ สัญลักษณ์ของดิแรกในกลศาสตร์ควอนตัม)

ค.ศ. 1675 - ไอแซก นิวตัน คิดค้นการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเพื่อหาคำตอบของสมการไม่เชิงเส้น เรียกว่าวิธีของนิวตัน หรือ วิธีของนิวตันและราฟสัน เนื่องจากเวลาต่อมานักคณิตศาสตร์ชื่อราฟสันก็คิดค้นวิธีเดียวกันนี้ได้โดยไม่ขึ้นกับนิวตัน

ค.ศ. 1691 - กอทท์ฟรีด ไลบ์นิซ คิดค้นเทคนิคในการแยกตัวแปรของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ค.ศ. 1696 - กุยลอมเมอ เดอ โลปีตาล (ซึ่งเป็นลูกศิษย์ของโยฮัน เบร์นูลลี ซึ่งเป็นลูกศิษย์ของไลบ์นิซอีกที) ได้คิดค้นกฎของโลปีตาล ในการคำนวณหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $0/0$

ค.ศ. 1696 - โยฮัน เบร์นูลลี หาคำตอบในปัญหา brachistochrone problem ได้สำเร็จและเป็นจุดเริ่มต้นของแคลคูลัสของการแปรผัน

ค.ศ. 1712 - บรู๊ค เทย์เลอร์ พัฒนอนุกรมเทย์เลอร์ได้สำเร็จ

ค.ศ. 1722 - อับราฮัม เดอ มอยเร ได้แสดง De Moivre's theorem ซึ่งทำให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันของตรีโกณมิติและจำนวนเชิงซ้อน

ค.ศ. 1730 - เจมส์ สเติร์จ ดีฟิแมธ The Differential Method

ค.ศ. 1733 - อับราฮัม เดอ มอยเร นำ การกระจายตัวแบบปกติในการประมาณค่าของการกระจายตัวแบบทวินามในทฤษฎีความน่าจะเป็น

ค.ศ. 1734 - เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ คิดค้น integrating factor technique ในการแก้ปัญหาสสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

ค.ศ. 1736 - เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ แก้ปัญหาสะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองโคนิกส์เบิร์ก ได้สำเร็จและส่งผลให้ทฤษฎีกราฟกำเนิดขึ้นมาเป็นสาขาใหม่ของคณิตศาสตร์

ค.ศ. 1739 - เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ คิดวิธีมาตรฐานในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ได้สำเร็จ

ค.ศ. 1761 - โทมัส เบย์ ได้สร้างทฤษฎีบทของเบย์ขึ้นมาในทฤษฎีความน่าจะเป็น

ค.ศ. 1762 - โจเซฟ หลุยส์ ลากรองซ์ คิดค้น divergence theorem

ค.ศ. 1796 - คาร์ล ฟรีดริช เกาส์ พิสูจน์ว่า รูป 17 เหลี่ยมด้านเท่า สามารถสร้างได้ด้วยไม้บรรทัดและวงเวียนเท่านั้น ซึ่งนับเป็นการต่อยอดความรู้กรีกที่นิ่งมาราว 2000 ปีได้สำเร็จ

ค.ศ. 1796 - เอเดรียน-แมรี เลอจองด์ ให้ข้อสันนิษฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบทจำนวนเฉพาะ

ค.ศ. 1799 - คาร์ล ฟรีดริช เกาส์ ให้บทพิสูจน์ของทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิต ที่บอกว่า ทุกๆ สมการพหุนามจะมีคำตอบในรูปจำนวนเชิงซ้อนเสมอ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงบทบาทที่สำคัญที่สุดของจำนวนเชิงซ้อนในพีชคณิต

คริสต์ศตวรรษที่ 19

ค.ศ. 1801 - ความเรียงของเกาส์ในเรื่องทฤษฎีจำนวนชื่อ *Disquisitiones Arithmeticae* ได้รับการตีพิมพ์เป็นภาษาละติน

ค.ศ. 1805 - เอเดรียน-แมรี เลอจองด์ คิดค้นวิธีกำลังสองต่ำสุดเพื่อใช้ในปัญหาการปรับเส้นโค้ง เพื่อให้ได้เส้นโค้งที่มี ค่าผิดพลาดเฉลี่ย น้อยที่สุด

ค.ศ. 1807 - โจเซฟ ฟูเรียร์ ตีพิมพ์ผลงานเกี่ยวกับอนุกรมฟูเรียร์ หรืออนุกรมตรีโกณมิตินั่นเอง

ค.ศ. 1817 - แบร์นาร์ด โบลซาโน ได้ให้บทพิสูจน์อย่างเคร่งครัดของทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง ซึ่งกล่าวว่า สำหรับฟังก์ชันต่อเนื่องใดๆ ถ้ามีจุดในโดเมนที่ให้ค่าบวกและค่าลบอย่างน้อยอย่างละหนึ่งจุด ฟังก์ชันนี้จะต้องมีจุดในโดเมนอย่างน้อยหนึ่งจุด และต้องอยู่ระหว่างสองจุดดังกล่าว ที่ให้ค่า 0

ค.ศ. 1824 - นีลส์ เฮนริก อาเบล ได้ให้บทพิสูจน์ว่าไม่มีคำตอบในรูปแบบรากสำหรับสมการพหุนามอันดับห้าใดๆ เป็นการให้คำตอบของปัญหาที่นักคณิตศาสตร์ทั้งหลายเฝ้าพยายามค้นคว้ามาราว 300 ปีได้สำเร็จ

ค.ศ. 1825 - ออگัสติน หลุยส์ โคชีเสนอ ทฤษฎีบทอินทิกรัลของโคชี (Cauchy integral theorem)

ค.ศ. 1825 - โยฮันน์ ปีเตอร์ กุสตาฟ ดิริชเลต์ และ เลอจองด์ ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทสุดท้ายของแฟร์มาต์ในกรณี $n = 5$

ค.ศ. 1825 - อันเดร แมรี แอมแปร์ ค้นพบ ทฤษฎีบทของสโตคส์

ค.ศ. 1828 - จอร์จ กรีน พิสูจน์ทฤษฎีบทของกรีน

ค.ศ. 1829 - นิโคไล อิวาโนวิช โลบาชอฟสกี ตีพิมพ์ผลงาน เรขาคณิตนอกแบบยูคลิดแบบไฮเปอร์โบลิก

ค.ศ. 1832 - Évariste Galois presents a general condition for the solvability of algebraic equations, thereby essentially founding group theory and Galois theory

ค.ศ. 1832 - Peter Dirichlet proves Fermat's last theorem for $n = 14$

ค.ศ. 1835 - Peter Dirichlet proves Dirichlet's theorem about prime numbers in arithmetical progressions

ค.ศ. 1837 - Pierre Wantzel proves that doubling the cube and trisecting the angle are impossible with only a compass and straightedge, as well as the full completion of the problem of constructability of regular polygons

ค.ศ. 1841 - Karl Weierstrass discovers but does not publish the Laurent expansion theorem

ค.ศ. 1843 - Pierre-Alphonse Laurent discovers and presents the Laurent expansion theorem

ค.ศ. 1843 - William Hamilton discovers the calculus of quaternions and deduces that they are non-commutative

ค.ศ. 1847 - George Boole formalizes symbolic logic in *The Mathematical Analysis of Logic*, defining what are now called Boolean algebras

ค.ศ. 1849 - George Gabriel Stokes shows that solitary waves can arise from a combination of periodic waves

ค.ศ. 1850 - Victor Alexandre Puiseux distinguishes between poles and branch points and introduces the concept of essential singular points

ค.ศ. 1850 - George Gabriel Stokes rediscovers and proves Stokes' theorem

ค.ศ. 1854 - Bernhard Riemann introduces Riemannian geometry

ค.ศ. 1854 - Arthur Cayley shows that quaternions can be used to represent rotations in four-dimensional space

ค.ศ. 1858 - August Ferdinand Möbius invents the Möbius strip

ค.ศ. 1859 - Bernhard Riemann formulates the Riemann hypothesis which has strong implications about the distribution of prime numbers

ค.ศ. 1870 - Felix Klein constructs an analytic geometry for Lobachevski's geometry thereby establishing its self-consistency and the logical independence of Euclid's fifth postulate

ค.ศ. 1873 - ชาลส์ เฮอร์ไมท์ พิสูจน์ได้ว่า e เป็นจำนวนอตรรกยะ

ค.ศ. 1873 - Georg Frobenius presents his method for finding series solutions to linear differential equations with regular singular points

ค.ศ. 1874 - เกออร์ก คันทอร์ shows that the set of all real numbers is uncountably infinite but the set of all algebraic numbers is countably infinite. Contrary to widely held beliefs, his method was not his famous diagonal argument, which he published three years later. (Nor did he formulate set theory at this time.)

ค.ศ. 1878 - Charles Hermite solves the general quintic equation by means of elliptic and modular functions

ค.ศ. 1882 - Ferdinand von Lindemann proves that π is transcendental and that therefore the circle cannot be squared with a compass and straightedge

ค.ศ. 1882 - Felix Klein invents the Klein bottle

ค.ศ. 1895 - Diederik Korteweg and Gustav de Vries derive the KdV equation to describe the development of long solitary water waves in a canal of rectangular cross section

ค.ศ. 1895 - เกออร์ก คันทอร์ publishes a book about set theory containing the arithmetic of infinite cardinal numbers and the continuum hypothesis

ค.ศ. 1896 - Jacques Hadamard and Charles de La Vallée-Poussin independently prove the prime number theorem

ค.ศ. 1896 - Hermann Minkowski presents Geometry of numbers

ค.ศ. 1899 - เกออร์ก คันทอร์ ค้นพบข้อขัดแย้งในทฤษฎีเซตของเขา

ค.ศ. 1899 - ดาฟิด ฮิลแบร์ท เสนอสังพจน์ทางเรขาคณิตที่มีความต้องการกันในตัวเองใน Foundations of Geometry

คริสต์ศตวรรษที่ 20

ค.ศ. 1900 - ดาฟิด ฮิลแบร์ท เสนอปัญหา 23 ข้อของฮิลแบร์ทที่กรุงปารีส โดยฮิลแบร์ทตั้งใจให้เป็นปัญหาแห่งศตวรรษใหม่ กลุ่มปัญหาที่ลึกซึ้งเหล่านี้ช่วยกระตุ้นวงการคณิตศาสตร์ในขณะนั้นให้พัฒนา ขึ้นเป็นอย่างมาก

ค.ศ. 1903 - เอ็ดมันด์ ลันเดาได้ให้บทพิสูจน์ที่ค่อนข้างง่ายของทฤษฎีบทจำนวนเฉพาะ

ค.ศ. 1908 - เอิร์นส เซอเมโลได้นิยามกลุ่มสังพจน์ของทฤษฎีเซตขึ้น เพื่อที่จะหลีกเลี่ยงข้อขัดแย้งที่คันทอร์และรัสเซลล์พบ

ค.ศ. 1913 - ศรีนิวาส รามานุจัน ส่งทฤษฎีบทจำนวนมากชุดหนึ่ง (แต่ไม่ได้ให้บทพิสูจน์) ไปยังก๊อดเฟรย์ ฮาร์ดีแห่งมหาวิทยาลัยเคมบริดจ์

ค.ศ. 1914 - Srinivasa Aiyangar Ramanujan publishes Modular Equations and Approximations to π

ค.ศ. 1928 - John von Neumann begins devising the principles of game theory and proves the minimax theorem

ค.ศ. 1931 - เคิร์ท เกอเดล พิสูจน์ทฤษฎีบทความไม่สมบูรณ์ของเกอเดล ที่บอกว่าระบบรูปนัย ถ้ามีประสิทธิภาพเพียงพอแล้ว จำเป็นที่จะต้องไม่สมบูรณ์ หรือไม่เช่นนั้นก็จะไม่มีความต้องการ

ค.ศ. 1933 - Andrey Nikolaevich Kolmogorov publishes his book Basic notions of the calculus of probability (Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung) which contains an axiomatization of probability based on measure theory

ค.ศ. 1940 - Kurt Gdel shows that neither the continuum hypothesis nor the axiom of choice can be disproven from the standard axioms of set theory

ค.ศ. 1943 - Kenneth Levenberg proposes a method for nonlinear least squares fitting

ค.ศ. 1948 - John von Neumann mathematically studies self-reproducing machines

ค.ศ. 1949 - John von Neumann computes π to 2,037 decimal places using ENIAC

ค.ศ. 1960 - C. A. R. Hoare invents the quicksort algorithm

ค.ศ. 1963 - Paul Cohen uses his technique of forcing to show that neither the continuum hypothesis nor the axiom of choice can be proven from the standard axioms of set theory

ค.ศ. 1994 - Andrew Wiles proves part of the Taniyama-Shimura conjecture and thereby proves Fermat's last theorem

ค.ศ. 1999 - the full Taniyama-Shimura conjecture is proved.

คริสต์ศตวรรษที่ 21 (ปัจจุบัน)

ค.ศ. 2000 - สถาบันคณิตศาสตร์เคลย์ (Clay Mathematics Institute) ได้ประกาศให้เงินรางวัลหนึ่งล้านเหรียญสหรัฐฯ แก่ผู้ที่สามารถหาคำตอบปัญหาข้อใดข้อหนึ่งในปัญหา 7 ข้อของเคลย์ได้

คำถามท้ายบท

ข้อ 1 จงสรุปประวัติสาขาวิชาคณิตศาสตร์มาโดยย่อเมื่อท่านได้ศึกษาเนื้อสาระเรียนรู้บทที่ 1?

ข้อ 2 จงแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของคณิตศาสตร์กับมนุษยชาติในอดีต ?

ข้อ 3 ท่านเริ่มเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์อย่างไร ?

ข้อ 4 สาขาวิชาคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กับศาสตร์สาขาวิชาใดบ้าง ?

ข้อ 5 คณิตศาสตร์มีส่วนสำคัญกับการดำเนินชีวิตของมนุษย์ปัจจุบันนี้อย่างไร ? จงอธิบาย

บทที่ 2

โครงสร้างและธรรมชาติของคณิตศาสตร์ และแนวคิด ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์

2.1 ความหมายของคณิตศาสตร์⁵

ทุกคนคงรู้จักคำว่า "คณิตศาสตร์" หรือต้องมีการใช้คณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวันอย่างแน่นอน แต่เชื่อว่าหลาย ๆ คนคงจะไม่ชอบ ในขณะที่อีกหลายคนอาจจะชอบ ถึงแม้ว่าคนที่ชอบวิชาคณิตศาสตร์ในปัจจุบันนี้จะมีจำนวนน้อยลงอย่างมาก และน้อยลงเรื่อย ๆ ก็ตาม แต่จะมีสักกี่คนที่สงสัยหรืออยากรู้ถึงความหมายของคำว่า "คณิตศาสตร์" บางคนอาจบอกว่าไม่จำเป็นต้องรู้ บ้างอาจบอกว่ารู้ไปแล้วได้ประโยชน์อะไร แต่เชื่อแน่ว่า ผู้ที่กำลังอ่านอยู่คงอยากรู้อย่างแน่นอน ความรู้บางเรื่องถึงแม้ไม่มีประโยชน์ในปัจจุบัน แต่ก็ไม่ได้หมายความว่าอนาคตจะไม่ได้ใช้ ถึงแม้ว่าอาจจะไม่ได้ใช้แต่ก็ไม่เสียหายอะไรถ้าเราอยากรู้ และตรงความอยากรู้อยากเห็นในเรื่องที่ดี ๆ นี้แหละที่ทำให้ความคิดเกิดการพัฒนามาจริงไหม ? ความหมายของคำว่า "คณิตศาสตร์" ได้มีผู้ที่ให้นิยามไว้มากมาย แต่แหล่งข้อมูลแห่งหนึ่งที่น่าสนใจคือ "วิกิพีเดีย สารานุกรมเสรี" ได้สรุปไว้ค่อนข้างน่าสนใจ ซึ่งขอนำเสนอบางส่วนดังนี้

1. คณิตศาสตร์ เป็นศาสตร์ที่มุ่งค้นคว้าเกี่ยวกับ โครงสร้างนามธรรม ที่ถูกกำหนดขึ้นผ่านทางกลุ่มของสัจพจน์ ซึ่งมีการให้เหตุผลที่แน่นอน โดยใช้ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์และสัญกรณ์คณิตศาสตร์
2. คณิตศาสตร์เป็นสาขาวิชาที่ศึกษาเกี่ยวกับรูปแบบและโครงสร้าง, การเปลี่ยนแปลง, และปริภูมิ กล่าวคร่าวๆ ได้ว่า คณิตศาสตร์นั้นสนใจ "รูปร่างและจำนวน" เนื่องจากคณิตศาสตร์มิได้สร้างความรู้ผ่านกระบวนการทดลอง บางคนจึงไม่จัดว่าคณิตศาสตร์เป็นสาขาของวิทยาศาสตร์
3. คำว่า "คณิตศาสตร์" (คำอ่าน: คะ-นิด-ตะ-สาด) มาจากคำว่า คณิต (การนับ หรือ คำนวณ) และ ศาสตร์ (ความรู้ หรือ การศึกษา) ซึ่งรวมกันมีความหมายโดยทั่วไปว่า การศึกษาเกี่ยวกับการคำนวณ หรือ วิชาที่เกี่ยวกับการคำนวณ.
4. คำว่า "คณิตศาสตร์" ตรงกับคำภาษาอังกฤษว่า mathematics มาจากคำภาษากรีก μάθημα (máthema) แปลว่า "วิทยาศาสตร์, ความรู้, และการเรียน" และคำว่า μαθηματικός (mathematikós) แปลว่า "รักที่จะเรียนรู้".
5. ในอเมริกาเหนือนิยมย่อ mathematics ว่า math ส่วนประเทศอื่นๆ ที่ใช้ภาษาอังกฤษนิยมย่อว่า maths โครงสร้างต่างๆ ที่นักคณิตศาสตร์สนใจและพิจารณานั้น มักจะมีต้นกำเนิดจากวิทยาศาสตร์ธรรมชาติและสังคมศาสตร์ โดยเฉพาะฟิสิกส์และเศรษฐศาสตร์ ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน ยังเกี่ยวข้องกับการประยุกต์ใช้ในสาขาวิทยาการคอมพิวเตอร์และทฤษฎีการสื่อสาร อีกด้วย
6. คณิตศาสตร์ใช้ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์และสัญกรณ์คณิตศาสตร์ ซึ่งทำให้กิจกรรมทุกอย่างกระทำผ่านทางขั้นตอนที่ชัดเจน เราจึงสามารถพิจารณาคณิตศาสตร์ว่า เป็นระบบภาษาที่เพิ่มความแม่นยำและชัดเจนให้กับภาษาธรรมชาติ ผ่านทางศัพท์และไวยากรณ์บางอย่าง สำหรับอธิบายและศึกษาความสัมพันธ์ทั้งทางกายภาพและนามธรรม.
7. คณิตศาสตร์ถูกจัดว่าเป็นศาสตร์สมบูรณ์ โดยจำไม่จำเป็นต้องมีการอ้างถึงใดๆ จากโลกภายนอก นักคณิตศาสตร์กำหนดและพิจารณาโครงสร้างบางประเภทสำหรับใช้ในคณิตศาสตร์เองโดยเฉพาะ เนื่องจาก

⁵ <https://th-th.facebook.com/notes/341542255876976คณิตศาสตร์ จากวิกิพีเดีย สารานุกรมเสรี พจนานุกรม ฉบับราชบัณฑิตยสถาน บรรณาธิการอินทอร์เน็ตโดยเฉพาะ>

โครงสร้างเหล่านี้ อาจทำให้สามารถอธิบายสาขาย่อยๆ หลายๆ สาขาได้ในภาพรวม หรือเป็นประโยชน์ในการคำนวณพื้นฐาน

8. นักคณิตศาสตร์หลายคนทำงานเพื่อเป้าหมายเชิงสุนทรียภาพเท่านั้น โดยมองว่าคณิตศาสตร์เป็นศาสตร์เชิงศิลปะ มากกว่าที่จะเป็นศาสตร์เพื่อการนำไปประยุกต์ใช้ แรงผลักดันในการทำงานเช่นนี้ มีลักษณะไม่ต่างไปจากที่กวีและนักปรัชญาได้ประสบและเป็นสิ่งที่ไม่สามารถอธิบายได้

9. อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ กล่าวว่า "คณิตศาสตร์เป็นราชินีของวิทยาศาสตร์" ในหนังสือ Ideas and Opinions ของเขา

2.2 โครงสร้างของระบบคณิตศาสตร์

การอธิบายศัพท์บางคำ ก็จำเป็นต้องอาศัยคำศัพท์อื่นๆ มาประกอบด้วยซึ่งตามแนวคิดนักคณิตศาสตร์ยุคใหม่ๆ เข้าใจแล้วว่า “เราไม่สามารถให้ความหมายคำได้ทุกคำ” เพราะเมื่อเราให้ความหมายของคำคำหนึ่ง ก็จำเป็นต้องใช้คำอีกคำหนึ่งมาช่วย ... เป็นเช่นนี้เรื่อยไปเกิดเหตุการณ์ในลักษณะ “งูกินหาง”

ดังนั้น เพื่อให้เข้าใจคณิตศาสตร์มากขึ้น ควรเข้าใจความหมาย และลักษณะของคำบางคำก่อนครับ โดยเฉพาะคำที่เกี่ยวกับโครงสร้างของระบบคณิตศาสตร์ พจนานุกรมฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ.2525 หน้า 162 ได้ให้ความหมายของคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้ “คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยการคำนวณ” จะเห็นได้ว่าทุกประเทศต่างตระหนักถึงคุณค่าและความสำคัญของคณิตศาสตร์ จึงกำหนดให้ทุกคนต้องเรียนคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นภาษาสากล จากการที่คณิตศาสตร์มีลักษณะเฉพาะที่สำคัญและมีคุณค่า ที่ว่า “มีความเป็นสากล” นี้ คณิตศาสตร์จึงเป็นศาสตร์ที่นักวิทยาศาสตร์และนักเทคโนโลยีในโลกต่างใช้เป็นเครื่องมือในการสื่อสารหรือสื่อความหมายซึ่งกันและกัน ทั้งนี้เพื่อเรียนรู้และถ่ายทอดความรู้ทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีให้แก่กันและกัน Gauss (ค.ศ.1777 – 1855) หนึ่งในสามนักคณิตศาสตร์ที่ยิ่งใหญ่ที่สุดตลอดกาลได้กล่าวยกย่องให้คณิตศาสตร์เป็นราชินีของวิทยาศาสตร์ (Mathematics is the Queen of the Science)

ธรรมชาติและลักษณะเฉพาะของคณิตศาสตร์ที่สำคัญประการหนึ่งคือ “คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นวิทยาศาสตร์” เพราะคณิตศาสตร์สามารถอธิบายได้และทุกคนยอมรับ นอกจากความเป็นภาษาสากลและความเป็นวิทยาศาสตร์ที่คณิตศาสตร์มีอยู่ในตัวแล้ว คณิตศาสตร์ยังมีลักษณะเป็นตรรกวิทยา เพราะคณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่ว่าด้วยเหตุผล คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่ใช้ศึกษาระบบที่สร้างขึ้นโดยอาศัยข้อตกลงและใช้เหตุผลตามลำดับ ในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ ไม่ว่าจะสาขาใดก็ตาม จะพบว่าในตอนเริ่มต้นของการศึกษาจะต้องเรียนรู้ถึงคำใหม่ๆ ในสาขานั้นๆ คำใหม่เหล่านี้บางคำก็จำเป็นต้องให้ความหมายที่ชัดเจน โดยกำหนดคำนิยาม (Define Term) ของคำนั้นๆ แต่บางคำก็ไม่จำเป็นต้องให้นิยาม เพราะให้นิยามไปก็ไม่มีความหมาย เช่น คำว่า จุด เส้น เซต เป็นต้น ซึ่งเราพูดถึงคำที่ไม่ให้นิยามเหล่านี้ว่า คำอนิยาม (Undefine Term)

นอกจากคำวนิยาม และคำอนิยามแล้ว เราจะพบสิ่งที่มีความสำคัญอีกประการหนึ่ง คือ ข้อความที่ยอมรับหรือมีข้อตกลงว่าเป็นความจริงโดยไม่ต้องมีการพิสูจน์ ซึ่งข้อตกลงเหล่านี้เรียกว่า สัจพจน์ (Postulate หรือ Axiom) ซึ่งสัจพจน์นี้มีความสำคัญกับคณิตศาสตร์มาก เพราะนักคณิตศาสตร์ตั้งแต่อดีตเชื่อว่าก่อนที่จะเราจะพิสูจน์ข้อความใดข้อความหนึ่งว่าถูกต้องนั้น เราต้องยอมรับสิ่งใดสิ่งหนึ่งว่าถูกต้องก่อน ไม่เช่นนั้นเราก็ไม่สามารถพิสูจน์ข้อความนั้นได้ จากนิยาม อนิยาม และสัจพจน์ เราสามารถพิสูจน์ข้อความใหม่ๆ ได้อีกมากมาย ข้อความที่พิสูจน์ได้เหล่านี้เรียกว่า ทฤษฎีบท (Theorem) และตรรกศาสตร์จะมีความสำคัญมากในช่วงนี้ กล่าวคือตรรกศาสตร์จะกลายเป็นเครื่องมือในการพิสูจน์ทฤษฎีบทนั่นเอง จะเห็นว่าตรรกศาสตร์นั้นมีความสำคัญมากเพียงใดในวิชาคณิตศาสตร์ ในทางคณิตศาสตร์ เราเรียกระบบที่ประกอบด้วยบทนิยาม คำนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท ว่าเป็นโครงสร้างของระบบคณิตศาสตร์ (Mathematical System Structure)

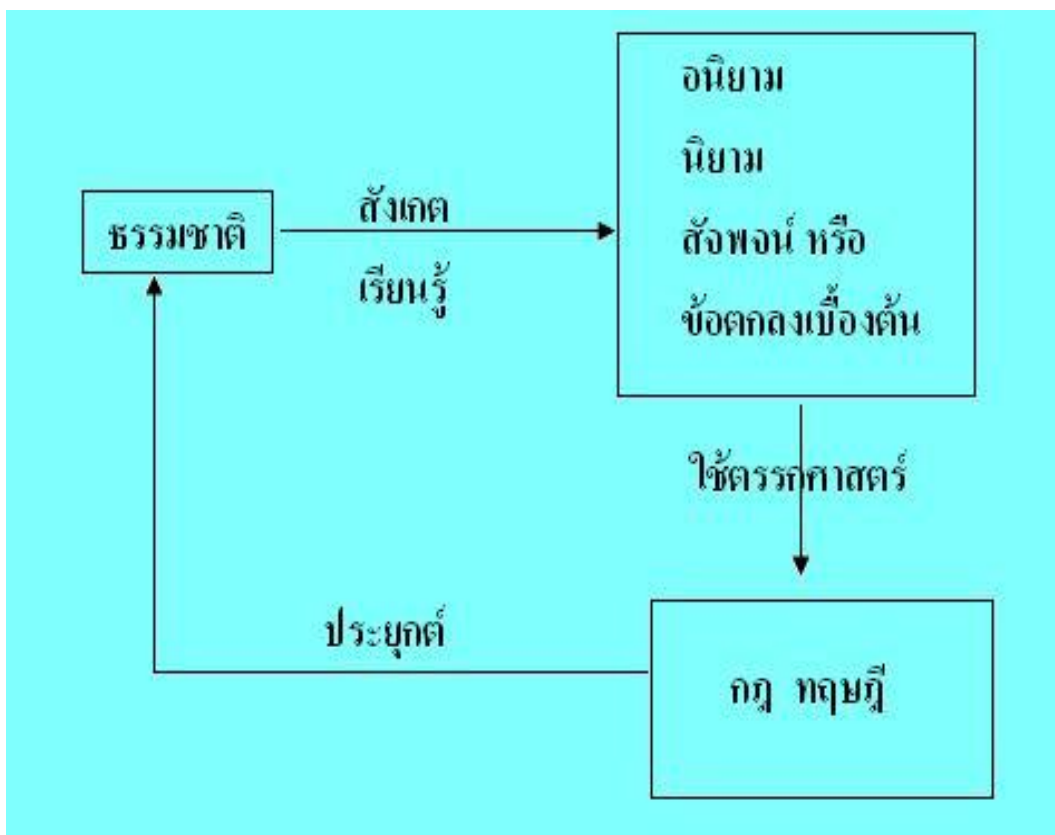
ฉะนั้น โครงสร้างของคณิตศาสตร์ซึ่งอยู่ในรูปที่สมบูรณ์แล้ว จะเริ่มต้นด้วยธรรมชาติ ซึ่งอาจจะเป็นเนื้อหาสาระทางฟิสิกส์ ชีววิทยา เศรษฐศาสตร์ จิตวิทยา สังคมศาสตร์ ธุรกิจ ยุทธศาสตร์ ฯลฯ ซึ่งหากว่าเราพิจารณา

เนื้อหาเหล่านี้แล้วสรุปให้อยู่ในรูปนามธรรม เพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเนื้อหาเหล่านั้นๆ เราจะต้องอาศัยอนิยาม นิยาม ตลอดจนสัจพจน์ มาใช้สรุปตามหลักตรรกวิทยาเพื่อให้ได้เป็นกฎ หรือทฤษฎีบท จากนั้นมนุษย์จะได้นำกฎหรือทฤษฎีบทไปประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์แก่ธรรมชาติต่อไป

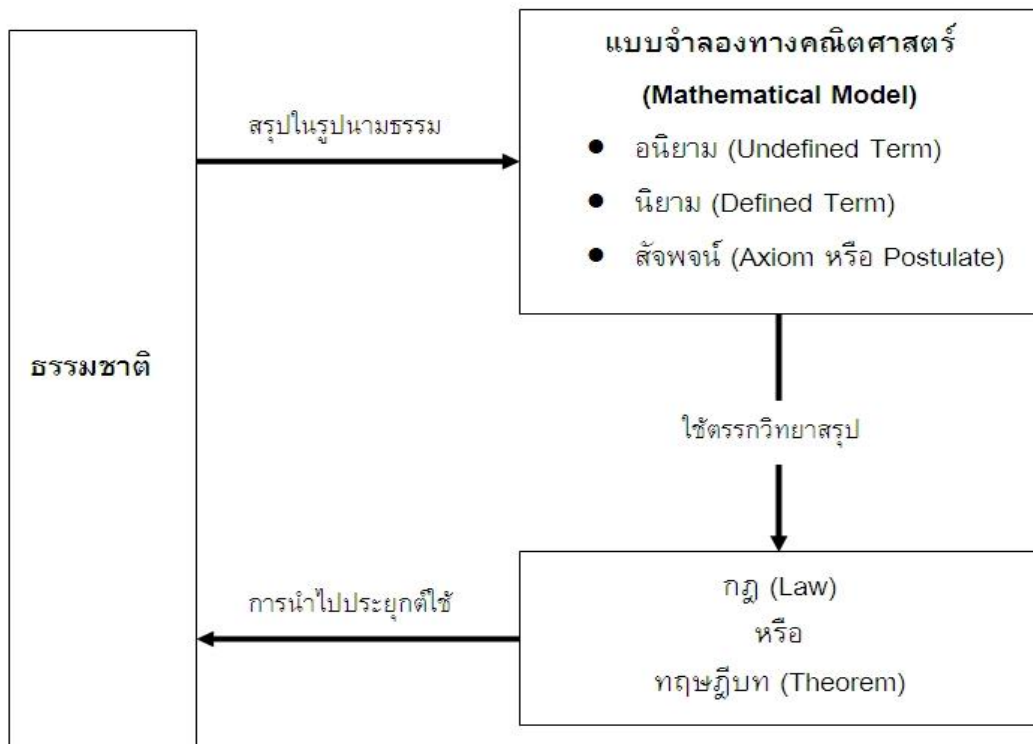
นักคณิตศาสตร์เริ่มเห็นความสำคัญของอนิยามเมื่อต้นคริสต์ศตวรรษที่ 19 เพราะในการให้คำนิยามใดก็ตาม เราจำเป็นต้องอาศัยพื้นฐานของคำบางคำมาตกลงให้เป็นอนิยามเสียก่อน จากนั้นจึงนำอนิยามไปใช้ในการนิยามคำอื่นๆ นอกจากนั้น เรายังมีข้อความที่เราจะตกลงกันว่าเป็นความจริง (โดยไม่ต้องพิสูจน์) เรียกว่าสัจพจน์ จากนั้นเราจึงใช้ตรรกวิทยา สรุปผลเป็นกฎ หรือทฤษฎีบท แล้วนำผลเหล่านั้นไปประยุกต์ในธรรมชาติต่อไป การที่เราทำเช่นนี้ก็เพื่อที่จะช่วยให้เข้าใจธรรมชาติได้ดีขึ้น ตลอดจนการค้นพบความสัมพันธ์ใหม่ๆ ซึ่งอาจจะช่วยเราในการควบคุม วางแผน และดำเนินการพัฒนาบุคคล สังคม และสิ่งแวดล้อมให้ดีขึ้น ในขณะที่เรานำกฎหรือทฤษฎีบทไปประยุกต์ใช้กับธรรมชาติ อาจจะได้ข้อมูลใหม่ๆ ซึ่งจะก่อให้เกิดการแก้ไขเปลี่ยนแปลงแบบจำลองขึ้น จนกระทั่งได้กฎ หรือทฤษฎีที่ดีกว่าเดิม แล้วจึงนำไปประยุกต์ใช้กับธรรมชาติอีกครั้งหนึ่ง วงเวียนเช่นนี้เรื่อยไป ซึ่งในส่วนนี้ช่วยชี้ให้เห็นว่าคณิตศาสตร์ช่วยปรับปรุงคุณภาพชีวิตของมนุษย์ ตลอดจนแก้ปัญหาเศรษฐกิจ และสังคมได้ชัดเจนยิ่งขึ้น ในระดับที่สูงยิ่งขึ้นไป นักคณิตศาสตร์อาจไม่ได้คำนึงถึงประโยชน์ที่จะนำไปใช้ในธรรมชาติ แต่คิดสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ขึ้นมาเอง แล้วค้นหาทฤษฎีหรือกฎต่างๆ จากแบบจำลองนี้ เราเรียกเนื้อหาเหล่านี้ว่า คณิตศาสตร์บริสุทธิ์ (Pure Mathematics) นักคณิตศาสตร์เหล่านี้ไม่ได้คำนึงถึงเรื่องที่จะนำไปใช้ประยุกต์เลย ถ้าบังเอิญสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ก็เป็นแค่ผลพลอยได้เท่านั้น

อย่างไรก็ตาม นักคณิตศาสตร์แต่ละคนก็มีมุมมองแตกต่างกันออกไป แต่ทุกสิ่งทุกอย่างที่นักคณิตศาสตร์จะอยู่บนพื้นฐานโครงสร้างระบบคณิตศาสตร์ นำเสนอรูปแบบ 2 ลักษณะ ดังนี้

ก. โครงสร้างลักษณะที่ 1



ข. โครงสร้างลักษณะที่ 2



2.3 แนวคิด และ ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์⁶

การศึกษาแนวคิดและทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องของคณิตศาสตร์ ดังนี้

ธรรมชาติและความสำคัญของคณิตศาสตร์

สาระวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญต่อชีวิตมนุษย์มาตั้งแต่อดีตกาลถึงปัจจุบัน ในอดีตกาลเวลากลางวัน ต้องอาศัยการดูเวลาจากดวงอาทิตย์ ในเวลากลางคืนต้องดูจากดวงจันทร์การดูเวลาเพื่อให้เกิดความเที่ยงตรงต้องดูเวลาจากนาฬิกา ไม่เพียงแต่เฉพาะการดูเวลาเท่านั้น คณิตศาสตร์ยังนำมาใช้ในชีวิตประจำวันอีกมากมาย เช่น การซื้อขายสิ่งของ การแลกเปลี่ยนสินค้า ล้วนต้องอาศัยคณิตศาสตร์ทั้งนั้น ซึ่งมีนักวิชาการได้กล่าวถึงความสำคัญของคณิตศาสตร์ ธรรมชาติ ลักษณะ ธรรมชาติของคณิตศาสตร์ และประโยชน์คุณค่าของคณิตศาสตร์

ความสำคัญของคณิตศาสตร์

สมทรง สุวพานิช (2539:14-15) กล่าวถึงความสำคัญทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า คณิตศาสตร์มีความสำคัญและมีบทบาทต่อบุคคลมาก คณิตศาสตร์ช่วยฝึกให้คนมีความรอบคอบมีเหตุผล และรู้จักเหตุผลความจริง สามารถแก้ปัญหาตามวัยทุกระยะได้

กรมวิชาการ (2545 : 1) ได้กล่าวถึงความสำคัญของคณิตศาสตร์ดังนี้ คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์สามารถคิดอย่างมีเหตุผล เป็น ระบบ

⁶ <https://th-th.facebook.com/notes/341542255876976> , คณิตศาสตร์ จากวิกิพีเดีย สารานุกรมเสรี พจนานุกรม ฉบับราชบัณฑิตยสถาน บนระบบเครือข่ายอินเทอร์เน็ตโดยเฉพาะ, 18 เมษายน 2558.

ระเบียบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถ้อยรอบครอบ ทำให้สามารถคาดการณ์วางแผน ตัดสินใจแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม

คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีตลอดจนศาสตร์อื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ จึงมีประโยชน์ต่อการดำรงชีวิต และพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น นอกจากนี้สาระวิชาคณิตศาสตร์ ยังช่วยพัฒนามนุษย์ให้สมบูรณ์มีความสมดุลทางร่างกาย จิตใจ สติปัญญาและอารมณ์ สามารถคิดเป็นทำเป็น ปัญหาเป็นสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า วิชาคณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญในการดำรงชีวิตของมนุษย์ เพราะคณิตศาสตร์เกี่ยวข้องกับทั้งระบบ ด้านพัฒนาการคิดของมนุษย์ และเกี่ยวข้องกับกิจกรรมประจำวัน ของมนุษย์อีกด้วย

ความหมายของคณิตศาสตร์

วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งที่มีความสำคัญตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน ในอดีตมนุษย์ก็รู้จักคณิตศาสตร์ในรูปแบบที่แตกต่างกัน เช่น การรวมกัน การหักออก การนับ ซึ่งเป็นพื้นฐานคณิตศาสตร์ในยุคปัจจุบัน คณิตศาสตร์มีบทบาทในสังคมทุกสังคมไม่ว่าจะเป็นสังคมในชนบทสังคมในเมืองก็ต้องอาศัยคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานในการดำรงชีวิตประจำวัน คณิตศาสตร์จึง มีผู้ให้ความหมายแตกต่างกันออกไปตามแนวคิดได้ดังนี้

พีระพล ศิริวงศ์ (2542 : 1- 3) กล่าวว่า คนไทยทั่วไปอาจเข้าใจคณิตศาสตร์ไปได้หลายแบบแตกต่างกันไป เช่น เข้าใจว่าวิชาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ และการหารของจำนวน คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยการคำนวณเชิงปริมาณ เป็นภาอย่างหนึ่งและ เป็นเครื่องมือของวิทยาการแขนงต่างๆ ยังมีนักคณิตศาสตร์หลายคนให้ความหมายคณิตศาสตร์ ไว้หลายแตกต่างกันไป เช่น

Stone ให้ความหมายไว้ว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยการศึกษาระบบที่เป็นนามธรรมมีโครงสร้างชัดเจนแน่นอน มีความสัมพันธ์เชื่อมโยงกัน

Black กล่าวไว้ว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยการศึกษาเกี่ยวกับโครงสร้างต่าง ๆ ที่แสดงได้ด้วยสัญลักษณ์ มีหลักเกณฑ์ที่สัมพันธ์เกี่ยวกับสัญลักษณ์

Hilbert กล่าวไว้ว่า คณิตศาสตร์เป็นเกมชนิดหนึ่งที่มีกติกาตายตัว ซึ่งเล่นโดยอาศัยเครื่องหมายที่ปราศจากความหมายบนแผ่นกระดาษ

Perise กล่าวไว้ว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยการสรุปความ

Russell กล่าวไว้ว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ไม่ทราบด้วยเรื่องอะไร และไม่ทราบว่า สิ่งที่พูดถึงนั้นเป็นเรื่องจริงหรือเท็จ

จากคำกล่าวทั้งหมดนี้แสดงให้เห็นว่า คณิตศาสตร์มีความหมายกว้างขวางมากมิได้มีความหมายเฉพาะเรื่องราวของตัวเลขหรือสัญลักษณ์เพียงอย่างเดียวเท่านั้น สรุปได้ดังนี้

1. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีลักษณะเป็นนามธรรม ซึ่งเกี่ยวกับความคิดที่ช่วยให้ผู้เรียนคิดเป็นทำเป็น และแก้ปัญหาเป็นมีความคิดเชิงวิเคราะห์เหตุผลที่สมเหตุสมผล อันเป็นพื้นฐาน ที่สำคัญยิ่งในการสร้างสรรค์สิ่งใหม่ ดังนั้นคณิตศาสตร์จึงเป็นพื้นฐานแห่งความเจริญของศาสตร์สาขาต่าง ๆ

2. คณิตศาสตร์ เป็นศาสตร์ที่มีรูปแบบที่ชัดเจนต้องคิดอย่างมีแบบแผนทุกขั้นตอน ในกระบวนการต้องมีเหตุผลตอบหรือวิเคราะห์จำแนกให้เห็นจริงได้แน่นอน

3. คณิตศาสตร์ เป็นศิลปะรูปแบบหนึ่งที่มีความงามในรูปแบบซึ่งว่าด้วยระเบียบ ความกลมกลืน ความคิดสอดคล้องกัน และความคิดขัดแย้งกันในระบบ แสดงให้เห็นความงาม ในความคิดที่สร้างสรรค์กลมกลืนจินตนาการที่มีเหตุผล และสัมผัสได้ แสดงความคิดริเริ่มใหม่ ๆ ทั้งแบบจำลองในรูปแบบของโครงสร้างใหม่ ที่เต็มไปด้วยเหตุและผล

4. คณิตศาสตร์ เป็นภาษาที่สื่อความหมายได้เป็นสากล อันประกอบด้วย สัญลักษณ์ ที่เหมาะสมรัดกุม และสื่อความหมายได้ชัดเจน เป็นภาษาที่มีองค์ประกอบเป็นตัวเลขตัวอักษร และสัญลักษณ์ซึ่งเป็นสื่อแทนความคิด

5. คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่มีโครงสร้างอื่นมีเหตุผล โดยเริ่มต้นจากสิ่งง่าย ๆ จากคำพื้นฐานแล้วนำไปสัมพันธ์เชื่อมโยงในสิ่งใหม่ ๆ อื่น⁷

ความหมายของคณิตศาสตร์ มีนักการศึกษาได้ให้ความหมายไว้ ดังต่อไปนี้

พจนานุกรมราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ.2525 (ราชบัณฑิตยสถาน 2539:164) ได้ให้ความหมายไว้ว่า “คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยการคำนวณ ”

ในหลักสูตรประถมศึกษาพุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง 2533) กล่าวว่า “หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาประกอบด้วยพื้นฐานทางคำนวณ พีชคณิต การวัด เรขาคณิต และสถิติ” (กระทรวงศึกษาธิการ 2538 : 16)

ยุพิน พิพิธกุล (2519 : 1-2) กล่าวว่า คำว่าคณิตศาสตร์ไม่ใช่หมายความว่า เพียงเลขคณิตซึ่งเกี่ยวกับจำนวนต่าง ๆ และการคำนวณ คณิตศาสตร์มีความหมายมากกว่าพีชคณิตที่จะใช้สัญลักษณ์และความเกี่ยวข้อง มีความหมายมากกว่า วิชาเลขคณิตที่จะศึกษาเพียงรูปร่างและขนาด มีความหมายมากกว่าตรีโกณมิติ ซึ่งเกี่ยวกับการวัดระยะทาง มีความหมายมากกว่าวิชาสถิติและแคลคูลัส ฯลฯ สรุปแล้วความหมายกล่าว คือ

1. คณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งเกี่ยวกับการคิด
2. คณิตศาสตร์เป็นภาษาอย่างหนึ่ง
3. คณิตศาสตร์เป็นโครงสร้างที่รวมของความรู้
4. คณิตศาสตร์เป็นการศึกษาเกี่ยวกับแบบแผน
5. คณิตศาสตร์เป็นศิลปะอย่างหนึ่ง

บุญทัน อยู่ชมบุญ (2529 : 1) ให้ความหมายคณิตศาสตร์ว่า หมายถึง กลุ่มของวิชาต่าง ๆ ได้แก่ เลขคณิต เรขาคณิต พีชคณิต แคลคูลัส ฯลฯ ซึ่งเกี่ยวพันกับปริมาณ ขนาด รูปร่างและความสัมพันธ์โดยที่ใช้จำนวนเลขและสัญลักษณ์เป็นเครื่องช่วย

พิศสมัย ศรีอำไพ (2533 : 1-2) ได้ให้แนวคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ดังนี้

1. คณิตศาสตร์เป็นการศึกษาถึงกระบวน และความสัมพันธ์
2. คณิตศาสตร์เป็นวิถีทางของการคิด ช่วยให้เรามีกลยุทธ์ในการจัดวิเคราะห์ และสังเคราะห์ข้อมูล
3. คณิตศาสตร์เป็นศิลปะให้ความซาบซึ้งความงามและความต่อเนื่องของคณิตศาสตร์
4. คณิตศาสตร์เป็นภาษาเพราะคนทั่วโลกสามารถเข้าใจประโยคคณิตศาสตร์ได้ตรงกัน
5. คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่นักคณิตศาสตร์ และนักวิทยาศาสตร์ใช้และเป็นสิ่ง ที่ทุกคนใช้ใน

ชีวิตประจำวัน

ธรรมชาติและลักษณะเฉพาะ

กรมวิชาการ (2545:2) ได้กล่าวถึงธรรมชาติและลักษณะเฉพาะ ของคณิตศาสตร์ไว้ว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีลักษณะเป็นนามธรรม มีโครงสร้างซึ่งประกอบด้วย คำนิยาม บทนิยาม และสัจพจน์ ที่เป็นข้อตกลงเบื้องต้น จากนั้นจึงใช้การให้เหตุผล ที่สมเหตุสมผล สร้างทฤษฎีบทต่าง ๆ ขึ้น และนำไปใช้ คณิตศาสตร์มีความถูกต้องเที่ยงตรงคงเส้นคงวา มีระเบียบแบบแผนเป็นเหตุเป็นผลและมีความสมบูรณ์ในตนเอง คณิตศาสตร์เป็นทั้งศาสตร์และศิลป์ที่ศึกษาเกี่ยวกับรูปแบบความของความสัมพันธ์ เพื่อให้ได้ข้อสรุปและนำไปใช้ประโยชน์ คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นภาษาที่เป็นสากล ที่ทุกคนเข้าใจตรงกัน ในการสื่อสาร สื่อความหมายและถ่ายทอดความรู้ระหว่างศาสตร์ต่าง ๆ จึงสรุปได้ว่า วิชาคณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นนามธรรม มีโครงสร้างที่ซับซ้อนที่เราต้องรู้จักในการใช้เหตุผล เพื่อให้เกิดความเข้าใจตรงกัน

ธรรมชาติของคณิตศาสตร์

ณรงค์ พลอยดณัย (2530 : 1- 2) ได้กล่าวถึงธรรมชาติของคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1. คณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่เกี่ยวกับความคิดรวบยอด ลักษณะของคณิตศาสตร์จะเป็นการศึกษาและรวบรวมสิ่งต่าง ๆ ที่คิดว่าเป็นจริงและถูกต้องหลาย ๆ สิ่ง มาสรุปเพื่อให้เห็นว่าสิ่งต่าง ๆ จะส่งผลหรือได้ผลอย่างไรจึงจะเหมาะสม และถูกต้องตามกระบวนการแห่งความคิดนั้น ๆ

2. คณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่มีโครงสร้าง การดำเนินการทางคณิตศาสตร์เป็นลักษณะของการสรุปรวบรวมสิ่งต่าง ๆ มาอย่างเป็นขั้นตอนเป็นลำดับเหตุการณ์ของสิ่งต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นว่า สิ่งใดเกิดขึ้นจะส่งผลตามมาเช่นไรสิ่งต่าง ๆ นั้นจะอยู่ในระบบที่ต่อเนื่อง ลักษณะของการศึกษาส่วนนั้น ๆ จะมีโครงสร้างการศึกษาที่แน่นอน โดยศึกษาจากสิ่งที่เป็นจริงไปสู่สิ่งที่เกิดขึ้นใหม่อย่างเป็นขั้นตอนที่ต่อเนื่องและคณิตศาสตร์จะสามารถกำหนดขอบเขตของสิ่งต่าง ๆ ที่จะศึกษาเพื่อให้เกิดความถูกต้องและเป็นจริงมากที่สุด อีกทั้งเพื่อประโยชน์ของการอ้างอิงสิ่งใหม่ ๆ

3. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่แสดงความเป็นเหตุต่อกัน

4. คณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่ใช้สัญลักษณ์ อีกทั้งคณิตศาสตร์ยังเป็นพื้นฐานของการนำไปใช้ประโยชน์ต่อวิทยาการในสาขาอื่น ๆ เพราะว่าคณิตศาสตร์เป็นสัญลักษณ์ที่เอื้ออำนวยต่อการหาเหตุผลการดำเนินงานที่เป็นขั้นตอนคณิตศาสตร์มีความกะทัดรัดในตัวเองทุก ๆ ด้านไม่ว่าจะเป็นการใช้เหตุผลการสรุป และการตั้งสมมุติฐานต่าง ๆ เพื่อศึกษาค้นคว้าวิจัยเพราะคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยสัญลักษณ์ในการแทนสิ่งต่าง ๆ ที่เป็นรูปธรรมทำให้เกิดความสะดวกใช้ได้ง่ายเพราะสัญลักษณ์เป็นการย่อสิ่งยาวให้กะทัดรัด

จากสิ่งที่กล่าวมาจึงสรุปธรรมชาติของคณิตศาสตร์ได้ว่า เป็นวิชาที่เกี่ยวกับความคิดรวบยอดมีโครงสร้างที่แน่นอน ชัดเจน กะทัดรัด และคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ใช้สัญลักษณ์ง่ายต่อการใช้เหตุผลและผล

ภาษาและแนวคิดทางคณิตศาสตร์

ณรงค์ พลอยดณัย (2530 : 2-3) กล่าวว่าลักษณะการพัฒนาทางด้านแนวคิด คณิตศาสตร์ก็ได้เรียนแบบจากการเรียนรู้ทางภาษามนุษย์ต่างกันตรงที่ภาษาของมนุษย์นั้นเป็นภาษาการถ่ายทอดความรู้สึกในรูปแบบทั่วไป แต่ภาษาทางคณิตศาสตร์เป็นการกำหนดภาษาขึ้นมาแต่ภาษาทางคณิตศาสตร์เป็นการกำหนดภาษาขึ้นมาในการพิจารณาลักษณะที่เป็นเหตุและผลหรือการกระทำที่เป็นเหตุ และผลต่อกันมีรูปแบบหรือโครงสร้างความเป็นเหตุเป็นผล ความสัมพันธ์ระหว่างภาษาต่อการพัฒนาสมอง ลักษณะโครงสร้างทางสมองจะเห็นว่าสมองของสัตว์กับคนคล้ายกันมาก โดยเฉพาะสมองลิงกับสุนัข ลองพิจารณาตั้งแต่ระยะเริ่มแรกทั้งคนสุนัข และลิง สามารถรับรู้ในสิ่งต่าง ๆ ได้ เช่น การดมการฟังและการสัมผัสและการรู้ความหมายของสิ่งต่าง ๆ รวบรวมได้ แต่ต่อมาคนจะเริ่มพูดได้เพราะคนมีกลไกควบคุมการเปล่งเสียงติดตัวมา ซึ่งกลไกเหล่านี้จะอยู่ในสมองข้างใดข้างหนึ่งมีหน้าที่ทางภาษา (Speech Areas) จึงทำให้มนุษย์มีการเรียนรู้ภาษาได้ดีกว่าสัตว์ทั้งหลาย ความสัมพันธ์ระหว่างภาษา กับความคิด ภาษามีความสำคัญต่อการพัฒนาสมองและคนสามารถติดต่อทำความเข้าใจ จึงสามารถที่จะถ่ายทอดทางความคิดและประสบการณ์ต่าง ๆ ที่พบเห็นให้กันละกันได้ จึงทำให้คนเราเกิดแนวคิดต่าง ๆ มากมายทำให้วุฒิภาวะทางสมองสูงขึ้น

การใช้สัญลักษณ์แทนภาษาคณิตศาสตร์ นักคณิตศาสตร์ได้พยายาม ที่จะอธิบายสิ่งต่าง ๆ ที่เขาพบเห็น และคิดค้นได้ให้ผู้อื่นเข้าใจเพื่อเป็นการถ่ายทอดแนวคิดที่เป็นประโยชน์แต่ลักษณะแนวคิดต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นเป็นการคิดที่มีเหตุผลในบางครั้งไม่สามารถที่จะแสดงออกให้เป็นรูปธรรมแต่นักคณิตศาสตร์ก็ได้พยายามเรียนแบบภาษาของคนเราจึงได้พยายามที่จะแสดงออกให้เข้าใจ ในความคิดของเขาด้วยการใช้สัญลักษณ์ต่าง ๆ มาแทนคำพูด

จึงสรุปได้ว่า ภาษามนุษย์และภาษาทางคณิตศาสตร์จะแตกต่างกันซึ่งภาษาของมนุษย์ จะถ่ายทอดความรู้สึกนึกคิดในรูปแบบทั่ว ๆ ไป แต่ภาษาคณิตศาสตร์ที่กำหนดขึ้นมาในการพิจารณาเหตุและผล ซึ่งภาษานั้นมี

ความสำคัญต่อการพัฒนาสมอง ซึ่งจะ使人สามารถติดต่อเข้าใจได้โดยใช้ภาษา เราสามารถที่จะเลียนแบบภาษา เราสามารถที่จะเลียนแบบภาษาพูด แสดงออกมาให้เข้าใจการใช้สัญลักษณ์แทนคำพูด

ประโยชน์และคุณค่าของคณิตศาสตร์

ณรงค์ พลอยदनัย (2530 :5-6) กล่าวได้ว่า คณิตศาสตร์มีความสำคัญมากจัดเป็นรากฐานของการพัฒนาในสาขาต่าง ๆ แบ่งตามประโยชน์ของคณิตศาสตร์ที่นำไปใช้กว้าง ๆ ได้ 3 ลักษณะดังนี้

1. คณิตศาสตร์เพื่อประโยชน์ในการปฏิบัติ

1.1. คณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน จะเห็นว่าการดำเนินชีวิตอยู่ในโลกปัจจุบัน จะหลีกเลี่ยงการใช้คณิตศาสตร์ไม่พ้น เมื่อสิ่งต่าง ๆ มากขึ้นก็ต้องพบกับคณิตศาสตร์ เช่น ต้องดูเวลาเท่าใดและในการดำรงชีวิตอยู่ต้องใช้เงินในการใช้จ่ายหรือแลกเปลี่ยนสิ่งของที่ต้องอาศัยตัวเลข การทำงานหรือการตัดสินใจต่าง ๆ ก็ต้องอาศัยประสบการณ์หรือข้อมูล หรือปริมาณในการตัดสินใจ ต่าง ๆ ก็ต้องอาศัยประสบการณ์หรือข้อมูล หรือปริมาณในการตัดสินใจ จึงกล่าวได้ว่าคณิตศาสตร์ เป็นส่วนหนึ่งของชีวิตประจำวัน

1.2. คณิตศาสตร์ในงานอาชีพทุกสาขาย่อมต้องการกำไร หรือผลสำเร็จในการประกอบอาชีพการดำเนินการนั้นๆ และการประกอบอาชีพที่จะได้กำไรหรือประสบความสำเร็จนั้น จะต้องขึ้นอยู่กับ การตัดสินใจ ข้อมูลที่ประกอบการตัดสินใจนี้จะอยู่ในรูปแบบของตัวเลขหรือปริมาณ

2. คณิตศาสตร์ในฐานะเป็นเครื่องมือฝึกจิต (Disciplinary Values) ธรรมชาติของคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการที่มีโครงสร้างที่เป็นรูปแบบและอาศัยลักษณะของการตัดสินใจ ภายใต้ความเป็นเหตุและความเป็นผล ดังนั้น การดำเนินการหรือการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จึงมีความมั่นคงมีขั้นตอนของความรู้สึกรู้สึกคิดและการตัดสินใจมีความเป็นเหตุเป็นผลทำให้มีความมั่นใจในการดำเนินการ และการตัดสินใจในแต่ละสถานการณ์ จึงจัดว่าเป็นลักษณะหนึ่งของการฝึกจิต

3. คุณค่าทางวัฒนธรรมของคณิตศาสตร์ (Cultural Values) คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีประโยชน์อย่างมหาศาลซึ่งเป็นรากฐานของการพัฒนาศาสตร์สาขาอื่นเป็นประโยชน์ในสายอาชีพต่าง ๆ และเป็นเครื่องมือในการฝึกจิตใจ การเชื่อว่าคณิตศาสตร์มีคุณค่ามาก จัดว่าเป็นวัฒนธรรมทางความคิดที่จะพัฒนาสมองมนุษย์ให้ถ่ายทอดกันมาทุกยุคทุกสมัยและภายในตัวของคณิตศาสตร์เองมีโครงสร้าง และระบบมีลักษณะพิเศษเฉพาะตัวเอง มีความสละสลวย และความเป็นเอกลักษณ์ในแต่ละลักษณะมีรูปแบบที่แน่นอนตายตัว และลักษณะรูปแบบในคณิตศาสตร์ แต่ละระยะนำไปอ้างอิงหรือเกี่ยวข้องให้เกิดความรู้ใหม่ ๆ จัดว่าเป็นวัฒนธรรมอย่างหนึ่งทางภาษาทางความคิด เป็นวัฒนธรรมของสัญลักษณ์ที่ไม่เหมือนใคร และเป็นคุณค่าทางวัฒนธรรมที่พัฒนาตัวเองอยู่เสมอ

4. คณิตศาสตร์เป็นศิลปะอย่างหนึ่ง ความหมายของ คณิตศาสตร์ก็คือความมีระเบียบ ความกลมกลืน นักคณิตศาสตร์มองคณิตศาสตร์มีความงามในการฝึกสมองของคนให้เกิดจินตนาการ ให้มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์มองหาความรู้ใหม่ ๆ ที่จะพัฒนาสมองมนุษย์ให้สามารถถึงเทคโนโลยีมาใช้ให้เกิดความสะดวกสบายต่อการดำรงชีวิตของมนุษย์ คณิตศาสตร์ทุกสาขามีความงามอยู่ในตัวเอง เช่นเรขาคณิตในงานศิลปะ และนักศิลปะทุกยุคสมัยก็สำนึกในบุญคุณของคณิตศาสตร์เสมอตั้งแต่ยุค กรีก เอเธนส์โรมัน จนมาถึงปัจจุบัน นอกจากนี้นักวิทยาศาสตร์ก็ยังยกย่องว่า คณิตศาสตร์เป็นราชินีของวิทยาศาสตร์ นั้นก็ย่อมแสดงให้เห็นว่า ถ้าเขาขาดเสียซึ่งคณิตศาสตร์แล้ววิทยาศาสตร์ก็พัฒนาได้ยากยิ่ง

จากที่กล่าวมาจึงสรุปได้ว่า คณิตศาสตร์มีประโยชน์มากมายตั้งแต่ยุคสมัยโบราณจะนำคณิตศาสตร์มาใช้ในชีวิตประจำวันใช้ในการประกอบอาชีพต่าง ๆ ใช้เป็นข้อมูลประกอบในการตัดสินใจอาจจะอยู่ในรูปของตัวเลขหรือปริมาณก็ได้ คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการฝึกจิตใจภายใต้ความเป็นเหตุและผลจะฝึกคนมีเหตุและผล คณิตศาสตร์ยังเป็นศาสตร์ของสาขาอื่น ๆ มีคุณค่าเห็นวัฒนธรรมทางความคิดในการพัฒนาสมองของมนุษย์ นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังมีความงดงามในตัวเองในรูปแบบของงานศิลปะ งานสถาปัตยกรรมต่าง ๆ อีกด้วย

ทฤษฎีการสอนคณิตศาสตร์

ไชยยศ เรืองสุวรรณ (2528 : 71-81) ได้กล่าวว่า

1) ทฤษฎีของ Skinner (1904, อ้างถึงใน ไชยยศ เรืองสุวรรณ 2528 : 71-81) จุดมุ่งหมายของ Skinner ในเรื่องของจิตวิทยา คือ เรื่องของพฤติกรรมโดยอาศัยพื้นฐานทางธรรมชาติของมนุษย์ วิธีสอนของ Skinner ตั้งอยู่บนพื้นฐานของการเสริมแรงแบบอาการกระทำ (Operant- Rein-Forcement) ในการกำหนดเสริมแรงการกระทำของผู้เรียน ถ้านำวิธีนี้มาใช้กับมนุษย์ในเรื่องของการเรียนการสอน หรือการเรียนรู้เพื่อให้เกิดผลดีต้องใช้เครื่องมือช่วย และขั้นตอนต่าง ๆ ในการสอนก็จะถูกแบ่งออกเป็นขั้นย่อย ๆ หรือสั้น ๆ เพื่อให้ง่ายต่อการเสริมแรงด้วย

ในเรื่องการกำหนดตารางเสริมแรง (Schedule Reinforcements) อย่างมีประสิทธิภาพนั้น Skinner หมายถึง การทำเรื่องนี้ให้สอดคล้องกับพฤติกรรมของผู้เรียน กล่าวคือ กระบวนการเรียนทั้งหมดจะแบ่งออกเป็นขั้นตอนย่อย ๆ และในแต่ละขั้นตอนย่อย ๆ เหล่านั้นควรมีการเสริมแรง ให้สอดคล้องกับความสำเร็จของผู้เรียนในแต่ละขั้นตอนความถี่ของการเสริมให้น้อยที่สุด สำหรับกรณีที่ผู้เรียนกระทำผิดในแต่ละขั้นตอน ฉะนั้นแนวคิดของ Skinner มีอิทธิพลต่อการพัฒนาของการเรียนการสอนโปรแกรมมากในช่วงปี ค.ศ. 950-1960 คำว่า โปรแกรม (Program) แรกเริ่มนั้นนำมาใช้เรียกลำดับขั้นตอนการสอนซึ่งบรรจุไว้ในเครื่องสอนและต่อมาได้ถูกนำมาใช้หลายรูปแบบ เช่น บทเรียนสำเร็จรูป การสอนแบบโปรแกรม เป็นต้น

สรุปว่าทฤษฎีแนวทางการศึกษาของ Skinner เป็นทฤษฎีที่ต้องการเงื่อนไขแบบอาการกระทำยังสามารถใช้การเสริมแรง เป็นตัวนำในการกระทำต่าง ๆ เพราะฉะนั้นภาษาทฤษฎีนี้บรรลุวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้

2) ทฤษฎีของ Piaget หลักการพื้นฐานของเทคโนโลยีทางการศึกษาและการสอนได้เสนอสิ่งที่มีคุณค่าให้แก่วงการศึกษาไว้ 3 ประการคือ

2.1) ความเชื่อเกี่ยวกับเรื่องสติปัญญา Piaget ไม่เชื่อว่าเด็กที่เกิดมานั้นจะมีสติปัญญาที่ติดแน่นมาแต่กำเนิดแต่เขามีความเชื่อว่าสติปัญญาที่เกิดขึ้นจากการปรับตัวให้เข้าสู่สมดุลระหว่างสติปัญญาโดยกำเนิดซึ่งปะทะสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมการปรับตัวให้สมดุลเกี่ยวข้องกับกระบวนการ 2 อย่างด้วยกัน คือ Assimilation กับ Accommodation เมื่อเด็กได้รับข้อมูลใหม่ ๆ จากสิ่งแวดล้อม เด็กจะซึมซาบ (Assimilate) สิ่งนั้นเข้าไปในสมองของเด็กซึ่งจะทำให้สมดุลของสมองถูกรบกวนกระบวนการนี้เรียกว่า Assimilation โดย Piaget กล่าวว่าเด็กจะไม่มีความรู้โดยที่มีคนบอกหรือได้อ่านเกี่ยวกับสิ่งนั้นแต่จะเรียนรู้โดยการลงมือ ทำความรู้จักกับสิ่งนั้นโดยตรง และเมื่อทำความรู้จักกับสิ่งนั้นแล้วเขาก็จะบรรจุ (Accommodate) สิ่งนั้น ๆ ไว้ในสมอง กระบวนการนี้เรียกว่า (Accommodate)

2.2) ลักษณะของความคิดแบบมีเหตุผล (Logical Thought) Piaget มีความเชื่อว่าเด็กจะใช้ข้อมูลที่สะสมไว้ในสมอง โดยแสดงออกมา 4 ลักษณะ

2.2.1 ความสามารถในการรวบรวมข้อมูล หรือรวมข้อเท็จจริงต่าง ๆ เข้าด้วยกัน เช่น $2+2...$ เข้าด้วยกันนี้เรียกว่า Combinativity

2.2.2. ความสามารถในการเปรียบเทียบ หรือบอกความแตกต่างลักษณะ ที่ตรงกันข้ามลักษณะเช่นนี้เรียกว่า Identity

2.2.3. ความสามารถในการรวบรวมข้อมูลชนิดเดียวกันเข้าด้วยกันโดยใช้วิธีการหลาย แบบ แต่ผลที่ได้เท่าเดิม ลักษณะนี้เรียกว่า Associativity

2.2.4. ความสามารถในการคิดย้อนกลับ คือคิดกลับป้อนกลับมาได้ ลักษณะนี้เรียกว่า Reversibility

2.3) ทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญา จะมีการพัฒนาการตามลำดับขั้นต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 Sensory- Motor Stage เริ่มตั้งแต่แรกเกิดจนถึงประมาณ 2 ขวบ ในระยะนี้เด็กจะพัฒนาการทางร่างกาย เช่น การเคลื่อนไหวต่าง ๆ ไปตามอัตโนมัติยังไม่ใช้สติปัญญาเข้ามาเกี่ยวข้อง

ขั้นที่ 2 Per- Operational Stage เด็กจะเริ่มมีพัฒนาการขั้นนี้ตั้งแต่อายุ 18 เดือน ไปจนกระทั่งประมาณอายุ 7 ขวบ เป็นระยะที่เริ่มรู้จักใช้สัญลักษณ์แทนสิ่งของ แต่ยังไม่สามารถคิดย้อนกลับ (Reversibility) และรับความคิดเห็นของผู้อื่นได้ ดังนั้นในขั้นนี้เด็กจะเรียนรู้เรื่องภาษาได้ดี

ขั้นที่ 3 Concrete Operational Stage เริ่มจากอายุ 8 ขวบไปจนถึง 12 ขวบ หรือก่อนวัยรุ่นขั้นนี้เด็กจะเรียนรู้กิจกรรมการกระทำต่างๆและปฏิบัติได้ดี สามารถคิดย้อนกลับและรับความคิดเห็นของผู้อื่น การเรียนของเด็กในขั้นนี้ต้องอาศัยสิ่งที่เป็นรูปธรรม เด็กจะต้องจับได้มองเห็นได้แต่ยังไม่เข้าใจหรือเห็นจินตนาการในสิ่งที่เป็นนามธรรม

ขั้นที่ 4 Formal Operational Stage จากอายุ 12 ขวบขึ้นไป จนถึงวัยรุ่น ขั้นนี้เด็กสามารถใช้ความคิดแบบมีเหตุผล และมีวุฒิภาวะพอที่จะรู้ และหาความรู้ได้ด้วยตนเอง สามารถคิดและเข้าใจในสิ่งที่เป็นนามธรรมแบบผู้ใหญ่ได้

จากทฤษฎี Piaget สรุปได้ว่า การจัดกระบวนการเรียนรู้ถ้าให้เด็กปฏิบัติจริงหรือได้กระทำด้วยมือของตัวเอง และเด็กก็จะบรรลุสิ่งที่ได้รับนั้นเองในสมองถ้าเรียนรู้โดยการบอกหรือชี้แนะเด็กจะไม่สามารถรับรู้สิ่งนั้นได้

ลำดับขั้นตอนการสอนคณิตศาสตร์

ลำดับขั้นตอนการสอนคณิตศาสตร์ แบบสถาบันสถาบันการส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) สถาบันการส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ซึ่งเป็นผู้รับผิดชอบทางเรื่องเนื้อหาและวิธีการสอนคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษามัธยมศึกษาตอนต้นและมัธยมศึกษาตอนปลาย อยู่ในปัจจุบัน ได้กำหนดแผนภูมิแสดงขั้นตอนการสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งอยู่ในคู่มือครูคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาของ สสวท. แผนภูมิจะแสดงให้เห็นว่าการสอนคณิตศาสตร์จัดเป็นลำดับขั้นตอนดังนี้ (สถาบันการส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี 2539:6)

1. ขั้นทบทวนความรู้เพิ่มเติม เป็นการกล่าวหรืออ้างอิง สิ่งที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว และเกี่ยวข้องกับบทเรียนใหม่ที่กำลังสอน
2. ขั้นจัดกิจกรรมในชั้นเรียนเพื่อนำไปสู่บทเรียน
 - 2.1 ขั้นของจริง เป็นที่พยายามนำรูปธรรมมาใช้ เพื่อให้นักเรียนสามารถสรุปไปสู่นามธรรม
 - 2.2 ขั้นรูปภาพ ครูเปลี่ยนเครื่องช่วยคิดจากของจริงมาเป็นรูปธรรม
 - 2.3 ขั้นสัญลักษณ์ หลังจากทีนักเรียน เรียนรู้ขั้นที่ใช้ของจริง หรือรูปประกอบการสอนแล้วครูอธิบายโดยใช้สัญลักษณ์
3. ขั้นสรุปไปสู่วิธีลัด เพื่อความสะดวกในการนำไปใช้ครั้งต่อไป
4. ขั้นฝึกทักษะ เมื่อเข้าใจวิธีลัดแล้วจึงให้นักเรียนฝึกทักษะ ด้วยการทำแบบฝึกหัดจากบทเรียนหรือบ้านงาน
5. ขั้นนำความรู้ไปใช้ประโยชน์ในชีวิตประจำวัน และใช้ในวิชาอื่น ที่เกี่ยวข้องโดยให้นักเรียนนำโจทย์ปัญหาหรือกิจกรรมที่มีก่ประสบในชีวิตประจำวัน
6. ขั้นประเมินผล เป็นการประเมินเพื่อปรับปรุงการเรียนการสอน และตัดสินผลการเรียน โดยจะต้องนำผลการประเมินไปเก็บสะสม เพื่อประกอบการประเมินการผ่านจุดประสงค์ในสมุดประจำชั้น

การสร้างแรงจูงใจในการเรียนคณิตศาสตร์

ฉวีวรรณ เสวตมัลย์ (2544:33 – 50) กล่าวว่า ครูคณิตศาสตร์เกือบทุกคนมักเห็นด้วยกับความสำคัญของการสร้างแรงจูงใจที่เหมาะสมในการสอนคณิตศาสตร์ เพราะว่า มีนักเรียนจำนวนน้อยที่สนใจเรียนคณิตศาสตร์ ครูส่วนมากจะสอนเนื้อหาไปตามหลักสูตร เพราะครูไม่มีเวลาที่จะค้นคว้าสิ่งเร้าความสนใจ ครูควรจะ

สร้างแรงจูงใจต้นคาบเรียนและหลังคาบเรียนประมาณ 2-3 นาที เพื่อคงสภาพความตั้งใจของนักเรียนและพัฒนาความคิดให้ความรู้สึกว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่น่าสนใจและสนุกสนาน วิธีสร้างแรงจูงใจให้นักเรียนมีหลายวิธี

1. ให้ออกาสการเดาและการคาดคะเน การเดาเป็นการส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความคิดสร้างสรรค์ ดังเช่น George Polya แห่งมหาวิทยาลัย Stanford กล่าวว่า “คณิตศาสตร์จะบรรลุได้ต้องประกอบด้วย การเดา” และการเดาจะต้องตามด้วยการพิสูจน์ให้เห็นจริง ตัวอย่าง ปัญหาที่ทำให้นักเรียนเกิดการเดา เช่น นักเรียนทุกคนมองดูแผ่นกระดาษที่ครูกำลังถืออยู่นี้ ครูกำลังพับมันครึ่งหนึ่งจะได้มี 2 ชิ้น คราวนี้ครูจะพับอีกครั้งจะได้มี 4 ชิ้น ครูจะพับต่อไปอีกเพื่อให้มี 8 ชิ้น 16 ชิ้น และต่อไปเรื่อย ๆ สมมุติว่าครูสามารถพับต่อไปจนครบ 50 ครั้ง กระดาษนี้จะหนาเท่าใด ถ้าครูให้นักเรียนค้นหาคำตอบโดยการคิดคำนวณทันที จะทำให้นักเรียนหมดกำลังใจในการค้นหาคำตอบครูควรจะแนะนำว่าปัญหานี้ถามาถามนั้นข้อมูลไม่เพียงพอ เราจะหาคำตอบไม่ได้ พอถึงตอนนี้ครูบอกให้นักเรียนสมมุติเองว่าถ้ากระดาษหนา $0.0003 \times 1^{10} = 0.0003 \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10}$ เนื่องจาก $2^{10} = 1024$ เราสามารถประมาณค่าเป็น 1,000 และเขียนเป็นผลคูณได้ $0.0003 \times 1,000 \times 1,000 \times 1,000 \times 1,000 \times 1,000 = 3,000,000,000$ จากตัวอย่างที่กล่าวจะทำให้นักเรียนเกิดความสนใจในการที่อยากจะเรียนคณิตศาสตร์

2. ใช้ความแปลกใหม่ของมโนทัศน์คณิตศาสตร์ให้เกิดประโยชน์ความคิดแปลกใหม่เป็นการฝึกให้นักเรียนคิดหาวิธีการใช้เหตุผล โดยผ่านทางวิธีทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย ๆ ที่มีความสัมพันธ์กันเราอาจใช้กลเม็ดวิธี บวก ลบ คูณ หาร ในการหาคำตอบสุดท้ายได้

3. แนะนำการคิดเลขแปลก ซึ่งครูสามารถนำมาใช้ในชั้นเรียน ให้นักเรียนมีส่วนร่วมอย่างกระฉับกระเฉง ดีกว่าที่จะให้ผู้เรียนเป็นผู้สังเกตการณ์หรือนั่งฟังเพียงอย่างเดียว จะทำให้นักเรียนเกิดการเบื่อหน่ายในการเรียน วิธีการคิดเลขแบบแปลก ๆ มีหลายวิธี

จิตวิทยาทั่วไปในการสอนคณิตศาสตร์

1) สาเหตุที่นำอุปกรณ์การสอนมาใช้ในการสอน

1.1) ในการสอนนั้นต้องให้นักเรียนรับประสบการณ์จากหลาย ๆ ด้านการให้ประสบการณ์เพียงด้านเดียวนั้นอาจทำให้เด็กไม่เข้าใจอย่างแจ่มแจ้ง

1.2) นักเรียนมีความแตกต่างกัน จะใช้วิธีเดียวสอนนักเรียนทุกคนให้เข้าใจเหมือนกันก็ย่อมทำไม่ได้

1.3) เพื่อที่จะให้เกิดความสนใจและประหยัดเวลาในการสอน

1.4) เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้จากสิ่งที่ป็นรูปธรรม ทำให้เกิดความเข้าใจลึกซึ้งและจำไปนาน

1.5) เพื่อนำสิ่งต่าง ๆ มาใช้ประกอบการสอนในห้องเรียนได้มากขึ้น

1.6) เพื่อเสริมสร้างทัศนคติที่ดีแก่นักเรียน ช่วยให้นักเรียนเกิดความรักเริ่มสร้างสรรค์

1.7) การที่จะให้นักเรียนเข้าใจได้ดีขึ้น ควรให้นักเรียนในการทำและใช้อุปกรณ์นั้นถ้าเป็นอุปกรณ์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเองแต่อุปกรณ์สำเร็จรูปก็ดูความเหมาะสมว่า ควรให้นักเรียนมีส่วนร่วมด้วยเพียงใด

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า อุปกรณ์การเรียนการสอนเป็นตัวกลางสำคัญในการดำเนินการจัดกระบวนการเรียนรู้ ให้บรรลุวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้ ซึ่งอุปกรณ์การสอนมีหลากหลายประเภท แต่ละประเภทควรจะนำมาใช้ให้เหมาะสมกับวัตถุประสงค์การเรียนรู้ จึงจะทำให้ผู้เรียนได้รับ ประโยชน์

จากการใช้อุปกรณ์อย่างคุ้มค่า

2) หลักการใช้อุปกรณ์สอนคณิตศาสตร์ในทางปฏิบัติต้องพิจารณาดังต่อไปนี้

2.1) การเลือก การที่จะนำอุปกรณ์มาสอนใช้นั้นต้องคำนึงถึง

2.1.1) วัสดุนั้นตรงกับวัตถุประสงค์ของบทเรียนที่ตั้งไว้หรือไม่

2.1.2) ต้องดูให้เหมาะสมกับชั้นวัย ระดับสติปัญญา ความต้องการของนักเรียน

- 2.1.3) ต้องดูให้เหมาะสมกับเวลา
- 2.1.4) ต้องใช้วัสดุที่ประหยัดราคาถูก หยิบใช้ได้คล่องกะทัดรัดมีความเหมาะสมถ้าประดิษฐ์ของเองต้องอยู่ในสภาพที่ใช้การได้ดี
- 2.1.5) ต้องส่งเสริมให้เกิดความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ไม่ทำขึ้นเพื่อความสวยงาม
- 2.1.6) ต้องคำนึงอยู่เสมอว่าอุปกรณ์นั้น ๆ ประดิษฐ์ขึ้นมาหรืออุปกรณ์สำเร็จที่นำมาใช้นั้นมีวัตถุประสงค์อะไร ซึ่งพิจารณาได้ 4 ประการ

- ใช้เป็นบทนำเป็นการใช้อุปกรณ์การสอนเพื่อทบทวนหรือนำเข้าสู่บทเรียน
- ใช้อธิบายขณะทำการสอน ทั้งนี้ เพื่อช่วยให้บทเรียนนั้นกระจำหรือจะใช้อุปกรณ์ เพื่อจะให้นักเรียนเกิดความคิดเพื่อนำไปสู่การค้นพบตัวเอง
- ใช้ขยายความรู้ของนักเรียนให้กว้างขวางมากขึ้น
- ใช้ย่อให้อยู่ในรูปสรุปเนื้อหาในบทเรียน เช่น สรุปกฎหรือสูตรต่าง ๆ

2.2) การเตรียม เมื่อครูเริ่มสอนนั้นทั้งครูและนักเรียนต้องเตรียมตัวทั้งสองฝ่าย การเตรียมตัวครูเป็นเรื่องที่สำคัญมากที่สุดที่ครูจะต้องเตรียมตัวการล่วงหน้าเป็นต้นว่า

- 2.2.1) การเตรียมคู่มือหาที่เรียนล่วงหน้า
- 2.2.2) ถ้าเป็นอุปกรณ์การสอนที่ประดิษฐ์ขึ้นเองครูก็ได้เตรียมจัดทำไว้แล้วแต่ถ้าเป็นอุปกรณ์สำเร็จครูจะต้องทดลองแสดงดูก่อน
- 2.2.3) ครูจะต้องวางแผนการติดตามผลหรือจัดผลไว้ล่วงหน้าว่าเมื่อใช้อุปกรณ์การสอนแล้วได้ผลอย่างไร การเตรียมตัวของนักเรียนต้องคำนึงถึงวัยของนักเรียนด้วย ไม่เช่นนั้นงานที่ครูกำหนดให้จะล้มเหลวงานที่กำหนดให้ เช่น
- 1. ให้นักเรียนทบทวนบทเรียนที่เรียนไปแล้ว เพื่อจะเป็นพื้นฐานในการรับความรู้ใหม่
- 2. ให้นักเรียนเตรียมศึกษาบทเรียนใหม่จากหนังสือเป็นการล่วงหน้า
- 3. ถ้าเป็นไปได้อาจจะให้นักเรียนช่วยประดิษฐ์อุปกรณ์การสอนซึ่งเรื่องนี้ครูอาจจะมอบเป็นเรื่อง ๆ ไป และอาจจะให้คะแนนในการทำอุปกรณ์เป็นคะแนนระหว่างปีเพื่อส่งเสริมให้นักเรียนอยากทำ
- 4. ถ้านักเรียนมีส่วนร่วมในการแสดงการใช้อุปกรณ์นั้น ครูจะต้องแจ้งล่วงหน้าและให้คำแนะนำเสียก่อน
- 5. แนะนำให้นักเรียนได้ใช้ความสนใจและสังเกตเป็นพิเศษในขณะที่ครูแสดงการโดยใช้อุปกรณ์

2.3) การแสดง เมื่อครูเตรียมบทเรียนและครูเตรียมอุปกรณ์การสอนพร้อมแล้วก็ถึงขั้นแสดงซึ่งสำคัญมาก เรื่องนี้ที่ควรจะต้องคำนึงถึงสิ่งต่อไปนี้

- 2.3.1) อุปกรณ์การสอนที่นำมาแสดงนั้นจะต้องมีขนาดใหญ่พอที่นักเรียนจะมองเห็นได้ทั้งชั้น
- 2.3.2) การอธิบายของครูนั้น เสียงต้องชัดเจนและดังพอการอธิบายต้องมีจังหวะเพื่อเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ติดตาม

2.3.3) การติดตั้งแผนภูมิต้องให้สูงพอหรือที่จะชูให้เด็กก็ต้องให้เห็นทุกคน

2.4) การติดตามผล เมื่อนำอุปกรณ์มาใช้แล้วทุกครั้งครูและนักเรียนต้องร่วมมือกันติดตามผลว่าอุปกรณ์การสอนที่นำมาใช้นั้นได้ผลเพียงไร เมื่อใช้ไปแล้วได้ผลอย่างไรก็ให้บันทึกผล ไว้เพื่อปรับปรุงแก้ไขในปีต่อไป แต่ข้อสำคัญของครูไม่ควรลืมว่าสื่อและอุปกรณ์การสอนนั้นใช้เพื่อวัตถุประสงค์ 4 ประการ คือ บทนำ อธิบาย ขยาย สรุป

จากที่กล่าวมาสรุปว่า การใช้อุปกรณ์การสอนนั้นจะต้องพิจารณาขั้นตอนการใช้ ตั้งแต่ขั้นเลือกอุปกรณ์การสอนให้เหมาะสมทุกด้านเช่น วัน เวลา วัตถุประสงค์บทเรียน ขั้นต่อไปคือ ขั้นเตรียมครูต้องวางแผนในการเตรียมตัวล่วงหน้าเพื่อการใช้อุปกรณ์การสอนนั้นจะไม่มีปัญหาในขณะใช้ ขั้นต่อไปคือการแสดงซึ่งเป็นขั้นที่

สำคัญที่สุด เพราะขั้นนี้เป็นขั้นที่นำอุปกรณ์มาสอนแก่ผู้เรียนเพื่อให้ผู้เรียนได้เรียนบทเรียนอย่างเข้าใจจากการอุปกรณ์ขั้นต่อไปคือการติดตามผลเพื่อที่เรา จะได้ทราบผลการใช้อุปกรณ์การสอนนั้นบรรลุวัตถุประสงค์ตามที่ตั้งไว้

2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง⁸

งานวิจัยในประเทศ

วิภาดา ปัญญาประชุม (2540 ; บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยเรื่องแบบฝึกเสริมทักษะที่มีประสิทธิภาพวิชาคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์ปัญหาการคูณการหารในชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า

1. แบบฝึกเสริมทักษะวิชาคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์ปัญหาการคูณ การหาร ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 มีประสิทธิภาพ 77.71/79.59 แสดงว่าสูงกว่ามาตรฐาน 75/75 ที่ตั้งไว้
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์ปัญหาการคูณการหาร ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 หลังการเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

นิตยา บุญสุข (2541-75) ได้ทำการวิจัยเรื่อง โจทย์ปัญหา การคูณ การหาร ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 เรื่องโจทย์ปัญหาการคูณการหารในชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า

- 2.1 แบบฝึกเสริมทักษะวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์ปัญหา เศษส่วนในชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 มีประสิทธิภาพ 87.02/75.77 แสดงว่าสูงกว่ามาตรฐาน 75/75 ที่ตั้งไว้
- 2.2 ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา ของนักเรียนโดยใช้แบบฝึกเสริมทักษะวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องโจทย์ปัญหา เศษส่วนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

รัชฎาภรณ์ พรหมลา (2541; บทคัดย่อ) ศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับการสร้างแบบฝึกเสริมทักษะ เพื่อสอนซ่อมเสริมทักษะการคิดคำนวณ การคูณ การหาร ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3

1. แบบฝึกเสริมทักษะเพื่อสอนซ่อมเสริมทักษะการคิดคำนวณการคูณ การหาร ที่ศึกษาค้นคว้าสร้างขึ้นมีประสิทธิภาพเท่ากับ 77.39/76.67
2. ทักษะการคิดคำนวณหลังได้รับการสอนซ่อมเสริมของนักเรียนกลุ่มเก่งหลังได้รับการฝึกสูงกว่าคะแนนทดสอบก่อนได้รับการฝึกจากแบบฝึกเสริมทักษะอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01
3. ทักษะการคิดคำนวณหลังได้รับการสอนซ่อมเสริมของนักเรียนกลุ่มอ่อนหลังได้รับการฝึกสูงกว่าคะแนนทดสอบก่อนใช้ได้รับการฝึกจากแบบฝึกเสริมทักษะอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สันติ ภูสัจด์ (2541;บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยเรื่องการฝึกเสริมทักษะวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์ปัญหา บวกลบระคน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ผลการวิจัยพบว่า

1. แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์ปัญหาบวกลบระคน ชั้นประถมศึกษา ปีที่ 1 มีประสิทธิภาพเท่ากับ 82.42/80.45
2. ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาวิชาคณิตศาสตร์ แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์ปัญหาบวกลบระคนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

วารี บุษบงค์ (2542; บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การพัฒนาแบบฝึกเสริมทักษะที่มีวิชาคณิตศาสตร์ ประสิทธิภาพ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 เรื่องการคูณการหารผลการวิจัยพบว่า

1. แบบฝึกเสริมทักษะวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการคูณการหารมีประสิทธิภาพเท่ากับ 78.80/78.90
2. นักเรียนที่เรียนด้วยแบบฝึกเสริมทักษะมีคะแนนเฉลี่ยหลังเรียนสูงกว่าคะแนนเฉลี่ย

⁸ <https://th-th.facebook.com/notes/341542255876976> , คณิตศาสตร์ จากวิกิพีเดีย สารานุกรมเสรี พจนานุกรม ฉบับราชบัณฑิตยสถาน บนระบบเครือข่ายอินเทอร์เน็ตโดยเฉพาะ, 18 เมษายน 2558.

วิไลวรรณ พุกทอง (2542; บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยเรื่องการพัฒนาแบบฝึกเสริมทักษะวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องโจทย์ปัญหาการคูณการหาร จำนวนตัวตั้งที่มีสองหลัก ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ผลการวิจัยพบว่า แบบฝึกเสริมทักษะวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องโจทย์ปัญหาการคูณการหาร จำนวนตัวตั้งที่มีสองหลัก ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 มีประสิทธิภาพเท่ากับ 82.50/81.07 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้วยแบบฝึกเสริมทักษะสูงกว่าก่อน เรียนด้วยแบบฝึกเสริมทักษะอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

วิหาร พลเพชร (2545; บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยการพัฒนาชุดแบบฝึกเสริมทักษะวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์ปัญหาการคูณการหาร สำหรับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 และการวิจัยพบว่าชุดแบบฝึกเสริมทักษะวิชาคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์ปัญหาการคูณการหาร สำหรับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 และการวิจัยสร้างขึ้นมีประสิทธิภาพเท่ากับ 82.46/76.77 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์มาตรฐานที่ตั้งไว้ หลังการใช้ชุดแบบฝึกเสริมทักษะแล้วนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์ปัญหาการคูณ สูงกว่าก่อนใช้ชุดแบบฝึกเสริมทักษะอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

อรรถพร สำเภา (2545; บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยการพัฒนาชุดแบบฝึกเสริมทักษะวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง เวลา ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่าแบบฝึกเสริมทักษะวิชาคณิตศาสตร์เรื่องเวลา ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์มาตรฐาน 85.31/80.00 นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู และใช้แบบฝึกเสริมทักษะที่สร้างขึ้น มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์เรื่องเวลา สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู และใช้แบบฝึกทักษะในหนังสือมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

อัญญา โพธิพลกร (2545 ; บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยการพัฒนาชุดแบบฝึกเสริมทักษะวิชาคณิตศาสตร์เรื่องเวลา ที่เป็นทักษะการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เรื่องด้วยการเรียนแบบร่วมมือ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า

1. ชุดการเรียนคณิตศาสตร์ที่เป็นทักษะการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ด้วยการเรียนแบบร่วมมือมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 80/80
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภายหลังได้รับการสอนด้วยชุดการเรียนคณิตศาสตร์ที่เป็นทักษะการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ด้วยการเรียน แบบร่วมมือสูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01
3. ความคิดเห็นของนักเรียนหลังการใช้ชุดการเรียนคณิตศาสตร์ที่เป็นทักษะการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ด้วยการเรียนแบบร่วมมือในระดับเห็นด้วยอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

พรศรี บุญรอด (2545 ; บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยการพัฒนาชุดแบบฝึกเสริมทักษะ วิชาคณิตศาสตร์ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญเรื่องปริมาตรและพื้นที่ผิวชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการศึกษาพบว่า

1. ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญเรื่องปริมาตรและพื้นที่ผิว ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 80/ 80
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ซึ่งเรียนโดยใช้ชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ หลังจากการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลอง อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ ระดับ 0.1

งานวิจัยต่างประเทศ

Gay and Gallagher (1976 : 52-59) ได้ทำการวิจัยเปรียบเทียบระหว่างวิธีการสอนโดยให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดอย่างสม่ำเสมอ ในช่วงเวลาการเรียนวิชานั้น ๆ กับการสอนโดยมีการทดสอบย่อยระหว่างการเรียนการสอนในเรื่องเดียวกัน ผลการทดลองปรากฏว่า กลุ่มนักเรียน ที่เรียนได้โดยมีการทดสอบย่อย ขณะเรียนมีผลสัมฤทธิ์สูงกว่ากลุ่มนักเรียนที่เรียนโดยฝึกทักษะด้วยการทำแบบฝึกหัดเพียงอย่างเดียว อย่างมีนัยสำคัญ ได้เรียนเกี่ยวกับการวิเคราะห์

Giffune (1979:34-38) ได้ศึกษาถึงผลการสอนโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ที่มุ่งเน้นความเข้าใจปัญหาทักษะการอ่านโจทย์ ที่มีผลปรากฏต่อทักษะการเขียนสมการการหาคำตอบ ความคงทนในการเขียนสมการพบว่า กลุ่มทดลองมีความสามารถทั้ง 3 ด้าน สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.1

Hall (1979 : 119) ได้ศึกษาผลของการสอนการวิเคราะห์กลุ่มตัวอย่างที่เป็นนักเรียน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 60 คน ซึ่งแบ่งเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม 30 คน แต่ละกลุ่มแต่ละกลุ่มมีนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 คะแนนเก่ง และไม่เก่ง 15 คน ได้เรียนเกี่ยวกับ การวิเคราะห์ และการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ผลปรากฏว่า

1. นักเรียนมีความสามารถในการวิเคราะห์สูงมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่มีความสามารถในการวิเคราะห์ต่ำ
2. นักเรียนที่ได้เรียนการวิเคราะห์มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ไม่ได้เรียนการวิเคราะห์

Muraski (1979 :11) ได้ศึกษาผลของการสอนอ่านในทางคณิตศาสตร์กับความสามารถ ในการแก้โจทย์ปัญหา ตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ แบ่งเป็นกลุ่มควบคุม กลุ่มทดลอง กลุ่ม ละ 13 คน กลุ่มทดลองได้รับการอ่านบทเรียน แต่ละบทเรียน แบ่งออกเป็น 5 เรื่อง ใช้เวลา 5 สัปดาห์ ต่อจากวัดความสามารถ ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลอง ผลการวิจัยปรากฏว่ากลุ่มทดลองมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.5

จากการศึกษาเอกสารผลงานการวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศสรุปได้ว่าการจัดการเรียนการสอนโดยใช้ชุดฝึกหรือแบบทักษะของครู สามารถนำไปสู่ความสำเร็จตามเป้าหมายของการเรียนการสอนได้อย่างมีประสิทธิภาพ และทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่สอนด้วยชุดฝึกทักษะแบบฝึกทักษะ สูงขึ้น

คำถามท้ายบท

ข้อ 1 จงบอกความหมายของคำว่า คณิตศาสตร์ มาอย่างละเอียดหลังจากศึกษาในบทแล้ว ?

ข้อ 2 จงอธิบายธรรมชาติของคณิตศาสตร์คืออะไร ?

ข้อ 3 จงบอกความสำคัญของหลักคณิตศาสตร์ว่าอย่างไรบ้าง ?

ข้อ 4 จงสรุปโครงสร้างของคณิตศาสตร์คืออะไร ?

ข้อ 5 จากคณิตศาสตร์ที่ว่า $2+3 = 5$ มีความสอดคล้องกับโครงสร้างของคณิตศาสตร์อย่างไร ?

ข้อ 6 จงตอบโจทย์ดังนี้

6.1 อนิยามคืออะไร ?

6.2 นิยามคืออะไร ?

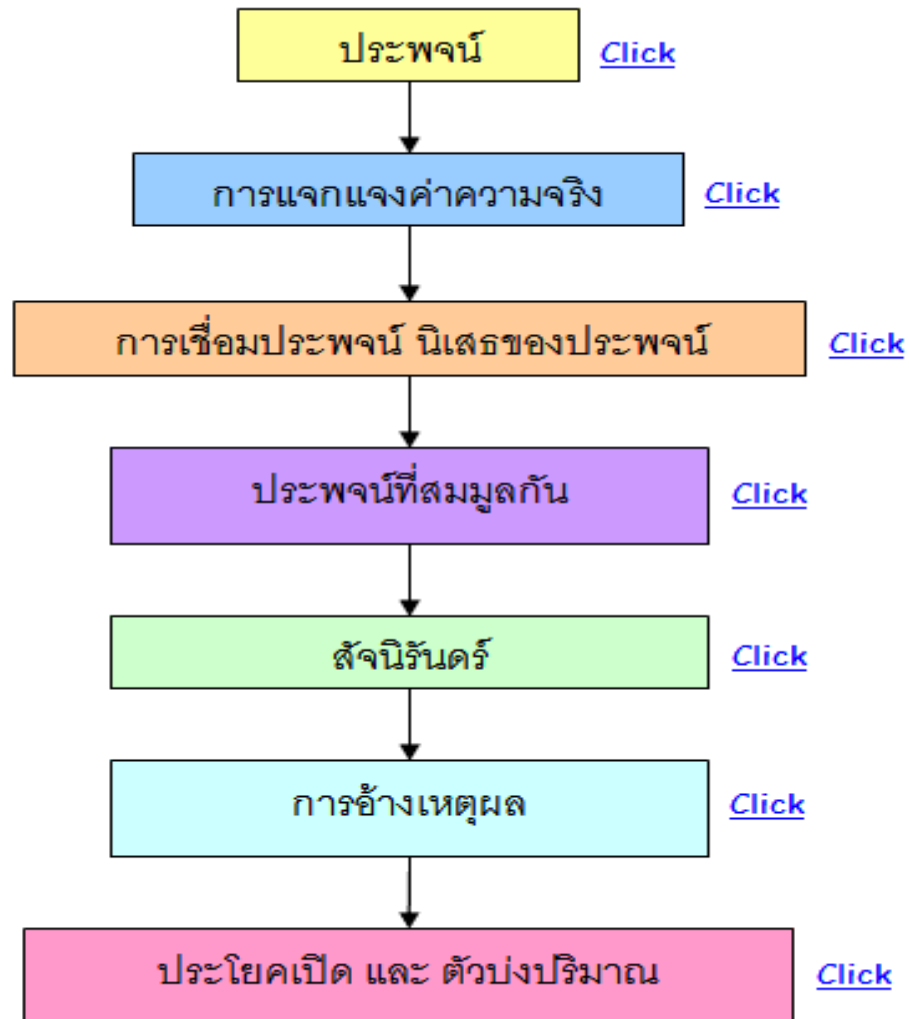
6.3 สัจพจน์คืออะไร ?

6.4 ทฤษฎีคืออะไร ?

ข้อ 7 จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ตามเนื้อหาสาระในบทแล้วมีข้อคิดเกี่ยวกับการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ในยุคปัจจุบันอย่างไร?

ข้อ 8 จากตัวเลข 500 สามารถวิเคราะห์ที่มาได้อย่างไร ?

บทที่ 3
ตรรกศาสตร์เบื้องต้น⁹



3.1 ความหมายของศัพท์ตรรกศาสตร์

คำว่า “ตรรกศาสตร์” ได้มาจากศัพท์ภาษาสันสกฤตสองศัพท์ คือ ตรรก และศาสตร์ ตรรก หมายถึง การตรึกตรอง ความคิด ความนึกคิด และคำว่า ศาสตร์ หมายถึง วิชา ตำรา รวมกันเข้าเป็น “ตรรกศาสตร์” หมายถึง วิชาว่าด้วยความนึกคิดอย่างเป็นระบบ ปรัชญาทั่วไปจึงมีความเห็นร่วมกันว่า ตรรกศาสตร์ คือ วิชาว่าด้วย การใช้กฎเกณฑ์ การใช้เหตุผล วิชาตรรกศาสตร์นั้นมีนักปราชญ์ทางตรรกศาสตร์ได้นิยามความหมายไว้มากมาย นักปราชญ์เหล่านั้น คือ

1. พจนานุกรมศัพท์ปรัชญาอังกฤษ – ไทย ฉบับราชบัณฑิตยสถาน นิยามความหมายว่า “ตรรกศาสตร์ คือ ปรัชญาสาขาที่ว่าด้วยการวิเคราะห์และตัดสินความสมเหตุสมผลในการอ้างเหตุผล”

⁹ กิริติ บุญเจือ.2520 . ตรรกวิทยาทั่วไป.กรุงเทพฯ: ไทยวัฒนาพานิช./จำนงค์ ทรงประเสริฐ.2507. ตรรกศาสตร์. กรุงเทพฯ: เลียงเชียง./ประยงค์ แสนบุราณ. ตรรกศาสตร์เบื้องต้น.ขอนแก่น: วิทยาลัยขอนแก่น./พกสูตรเข้าสอบ คณิต ม.ปลาย พิมพ์ครั้งที่ 7 ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์, 2551./สุวรร กาญจนมยุร.2523. ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์.กรุงเทพฯ: ไทยวัฒนาพานิช. แหล่งที่มา : <http://logic-computer.blogspot.com/>, 20 เมษายน 2558.

2. กิริติ บุญเจือ นิยามความหมายว่า “ตรรกวิทยา คือ วิชาที่ว่าด้วยกฎเกณฑ์การใช้เหตุผล”
3. “Wilfrid Hodges” นิยามความหมายว่า “ตรรกศาสตร์ คือ การศึกษาระบบข้อเท็จจริงให้ตรงกับความจริง”

3.2 ประพจน์ (Proposition)

ประพจน์ คือ ประโยคที่เป็นจริงหรือเป็นเท็จเพียงอย่างเดียวเท่านั้น ประโยคเหล่านี้อาจจะอยู่ในรูป **ประโยคบอกเล่า หรือ ประโยคปฏิเสธ** ก็ได้

ประโยคต่อไปนี้เป็นประพจน์

-จังหวัดชลบุรีอยู่ทางภาคตะวันออกของไทย (จริง)

- $5 \times 2 = 2 + 5$ (เท็จ)

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นประพจน์

-โธ่คุณ (อุทาน)

-กรุณาปิดประตูด้วยครับ (ขอร้อง)

-ท่านเรียนวิชาตรรกวิทยาเพื่ออะไร (คำถาม)

ประโยคเปิด (Open sentence)

บทนิยาม **ประโยคเปิด** คือ ประโยคบอกเล่า ซึ่งประกอบด้วยตัวแปรหนึ่งหรือมากกว่าโดยไม่เป็นประพจน์ แต่จะเป็นประพจน์ได้เมื่อแทนตัวแปรด้วยสมาชิกเอกภพสัมพัทธ์ตามที่กำหนดให้ นั่นคือเมื่อแทนตัวแปรแล้วจะสามารถบอกค่าความจริง

ประโยคเปิด เช่น

1. เขาเป็นนักบาสเกตบอลทีมชาติไทย

2. $x + 5 = 15$

3. $y < -6$

ประโยคที่ไม่ใช่ประโยคเปิด เช่น

1. 10 เป็นคำตอบของสมการ $X-1=7$

2. โลกหมุนรอบตัวเอง

3. จงหาค่า X จากสมการ $2x+1=8$

3.3. ตัวเชื่อมประพจน์ (connective)¹⁰

1. ตัวเชื่อมประพจน์ “และ” (conjunction) ใช้สัญลักษณ์แทน $\wedge$ และเขียนแทนด้วย $P \wedge Q$ แต่ละประพจน์มีค่าความจริง (truth value) ได้ 2 อย่างเท่านั้น คือ จริง (True) หรือ เท็จ (False) ถ้าทั้ง P และ Q เป็นจริงจะได้ว่า $P \wedge Q$ เป็นจริง กรณีอื่นๆ $P \wedge Q$ เป็นเท็จ เราให้นิยามค่าความจริง $P \wedge Q$ โดยตารางแสดงค่าความจริง (truth table) ดังนี้

¹⁰ ประยงค์ แสนบุราณ. ตรรกศาสตร์เบื้องต้น.ขอนแก่น: วิทยาลัยขอนแก่น.,พกสูตรเข้าสอบ คณิต ม.ปลาย พิมพ์ครั้งที่ 7 ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์, 2551.,สุวร กาญจนมยุร.2523. ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์.กรุงเทพฯ: ไทยวัฒนาพานิช., 22 เมษายน 2558.

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ตัวอย่าง

$5+1 = 6 \wedge 2$ น้อยกว่า 3 มีค่าความจริงเป็น (จริง)

$5+1 = 6 \wedge 2$ มากกว่า 3 มีค่าความจริงเป็น (เท็จ)

$5+1 = 1 \wedge 2$ น้อยกว่า 3 มีค่าความจริงเป็น (เท็จ)

$5+1 = 1 \wedge 2$ มากกว่า 3 มีค่าความจริงเป็น (เท็จ)

2. ตัวเชื่อมประพจน์ ” หรือ ” (Disjunction) ใช้สัญลักษณ์แทน $\vee$ และเขียนแทนด้วย $P \vee Q$ และเมื่อ $P \vee Q$ จะเป็นเท็จ ในกรณีที่ทั้ง P และ Q เป็นเท็จเท่านั้น กรณีอื่น $P \vee Q$ เป็นจริง เราให้นิยามค่าความจริงของ $P \vee Q$ ตัวอย่างตารางค่าความจริง ดังนี้

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ตัวอย่าง

$5 + 1 = 6 \vee 2$ น้อยกว่า 3 มีค่าความจริงเป็น (จริง)

$5 + 1 = 6 \vee 2$ มากกว่า 3 มีค่าความจริงเป็น (จริง)

$5 + 1 = 1 \vee 2$ น้อยกว่า 3 มีค่าความจริงเป็น (จริง)

$5 + 1 = 1 \vee 2$ มากกว่า 3 มีค่าความจริงเป็น (เท็จ)

3. ตัวเชื่อมประพจน์ “ ถ้า...แล้ว ” (Conditional) ใช้สัญลักษณ์แทน “ $\rightarrow$ ” และ เขียนแทนด้วย $P \rightarrow Q$ นิยามค่าความจริงของ $P \rightarrow Q$ โดยแสดงตารางค่าความจริงดังนี้

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ตัวอย่าง

- $1 < 2 \rightarrow 2 < 3$ มีค่าความจริงเป็น (จริง)
 $1 < 2 \rightarrow 3 < 2$ มีค่าความจริงเป็น (เท็จ)
 $2 < 1 \rightarrow 2 < 3$ มีค่าความจริงเป็น (จริง)
 $2 < 1 \rightarrow 3 < 2$ มีค่าความจริงเป็น (จริง)

4. ตัวเชื่อมประพจน์ “ก็ต่อเมื่อ” (Biconditional) ใช้สัญลักษณ์แทน $\leftrightarrow$ และเขียนแทนด้วย $P \leftrightarrow Q$ นั่นคือ $P \leftrightarrow Q$ จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ ทั้ง P และ Q เป็นจริงพร้อมกันหรือทั้ง P และ Q เป็นเท็จพร้อมกัน ตารางแสดงค่าความจริงของ $P \leftrightarrow Q$ ดังนี้

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ตัวอย่าง

- $1 < 2 \leftrightarrow 2 < 3$ มีค่าความจริงเป็น (จริง)
 $1 < 2 \leftrightarrow 3 < 2$ มีค่าความจริงเป็น (เท็จ)
 $2 < 1 \leftrightarrow 2 < 3$ มีค่าความจริงเป็น (จริง)
 $2 < 1 \leftrightarrow 3 < 2$ มีค่าความจริงเป็น (เท็จ)

5. นิเสธ (Negation) ใช้สัญลักษณ์แทน $\sim$ เขียนแทนนิเสธของ P ด้วย $\sim P$ ถ้า P เป็นประพจน์นิเสธของประพจน์ P คือประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับ P ตารางแสดงค่าความจริงดังนี้

P	$\sim P$
T	F
F	T

ตัวอย่าง

ถ้า p แทนประโยคว่า "วันนี้เป็นวัน เสาร์"

นิเสธของ p หรือ $\sim p$ คือประโยคที่ว่า "วันนี้ไม่เป็นวันเสาร์"

3.4 สัจนิรันดร์ (Tautology) และความขัดแย้ง (Contradiction)

1. สัจนิรันดร์ (Tautology) คือ รูปแบบประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอโดยไม่ขึ้นอยู่กับค่าความจริงของตัวแปรของแต่ละประพจน์ที่มีรูปแบบเป็นสัจนิรันดร์ เรียกว่า ประพจน์สัจนิรันดร์ (Tautology statement) ตัวอย่างที่ 1 $P \rightarrow P \vee Q$ เป็นสัจนิรันดร์ เราสามารถพิสูจน์ได้หลายวิธี

P	Q	$P \vee Q$	$P \rightarrow P \vee Q$
T	T	T	T
T	T	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

จากตารางแสดงค่าความจริงไม่ว่า P และ Q จะเป็นจริงหรือเท็จก็ตาม
ประพจน์ $P \vee Q$ เป็นจริงเสมอ ดังนั้นประพจน์นี้เป็น สัจนิรันดร์

2). ความขัดแย้ง (Contradiction) คือ รูปแบบประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จเสมอโดยไม่ขึ้นอยู่กับค่าความจริงของตัวแปรของแต่ละประพจน์ย่อยประพจน์ที่มีรูปแบบ เป็นความขัดแย้ง เรียกว่า ประพจน์ความขัดแย้ง (Contradiction statement)

ตัวอย่าง $P \wedge \sim P$ เป็น ความขัดแย้ง ตารางแสดงค่าความจริง

p	$\sim P$	$P \wedge \sim P$
T	F	F
F	T	F

$P \wedge \sim P$ มีค่าเป็นเท็จ สำหรับทุกๆ ค่าความจริงของ P
ดังนั้น $P \wedge \sim P$ จึงเป็นความขัดแย้ง (Contradiction)

3.5 ทฤษฎีตรรกสมมูล (Logical Equivalences)

ความรู้ประพจน์ตรรกสมมูล (Logical equivalent statement) มีประโยชน์มาก สำหรับการหาข้อโต้แย้งและข้อสรุปในทางคณิตศาสตร์ ซึ่งในทางปฏิบัติแล้ว การสรุปเหตุผลในแต่ละรูปจะยุ่งยากมากหากไม่อาศัยทฤษฎี ตรรกสมมูลใน การกล่าวอ้าง ดังนั้นจึงสรุปทฤษฎีตรรกสมมูลไว้สำหรับใช้อ้างอิงต่อไป

เมื่อกำหนดให้ p , q , r แทนประพจน์ใดๆ t แทนสัจนิรันดร์ c แทนความขัดแย้ง

1. กฎการสลับที่ (Commutative laws)

$$p \wedge q = q \wedge p, p \vee q = q \vee p$$

2. กฎการเปลี่ยนหมู่ (Associative laws)

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r), (p \wedge q) \vee r = p \vee (q \wedge r)$$

3. กฎการแจกแจง (Distributive laws)

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r), p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

4. กฎเอกลักษณ์ (Identity laws)

$$p \vee t = t, p \wedge t = p$$

5. กฎนิเสธ (Negative laws)

$$p \vee \sim p = t, p \wedge \sim p = c$$

6. กฎนิเสธซ้อนนิเสธ (Double negative laws)

$$\sim(\sim p) = p$$

7. กฎนิพจน์ (Idempotent laws)

$$p \wedge p = p, p \vee p = p$$

8. กฎของเดอมอแกน (demerger's laws)

$$\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q, \sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$$

9. กฎการจำกัดขอบข่าย (Universal bound laws)

$$p \vee t = t, p \wedge c = c$$

10. กฎการซึมซับ (Absorption laws)

$$p \vee (p \wedge q) = p, p \wedge (p \vee q) = p$$

11. นิเสธของ c และ t

$$\sim t = c, \sim c = t$$

3.6 ตัวบ่งปริมาณ (Quantified statement)

ตัวบ่งปริมาณในตรรกศาสตร์ มี 2 ชนิด คือ

1) ตัวบ่งปริมาณ "ทั้งหมด" หมายถึงทุกสิ่งทุกอย่างที่ต้องการพิจารณาในการนำไปใช้อาจใช้คำอื่นที่มีความหมายเช่นเดียวกับ "ทั้งหมด" ได้ ได้แก่ "ทุก" "ทุก ๆ" "แต่ละ" "ใด ๆ" ฯลฯ เช่น คนทุกคนต้องตาย, คนทุก ๆ คนต้องตาย, คนแต่ละคนต้องตาย, ใคร ๆ ก็ต้องตาย

2) ตัวบ่งปริมาณ "บาง" หมายถึงบางส่วนหรือบางสิ่งบางอย่างที่ต้องการพิจารณา ในการนำไปใช้อาจใช้คำอื่นที่มีความหมายเช่นเดียวกันได้ ได้แก่ "บางอย่าง" "มีอย่างน้อยหนึ่ง" เช่น สัตว์มีกระดูกสันหลังบางชนิดออกลูกเป็นไข่, มีสัตว์มีกระดูกสันหลังอย่างน้อยหนึ่งชนิดที่ออกลูกเป็นไข่

ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

1. $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ x ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง
2. $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อมี x อย่างน้อย 1 ตัวที่ทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ
3. $\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อมี x อย่างน้อย 1 ตัวที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง
4. $\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อไม่มี x ใดๆ ในเอกภพสัมพัทธ์ที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

3.7 การให้เหตุผล (Reasoning)

โดยทั่วไปกระบวนการให้เหตุผลมี 2 ลักษณะคือ

1. การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นการให้เหตุผลโดยนำข้อความที่กำหนดให้ ซึ่งต้องยอมรับว่าเป็นจริง ทั้งหมด เรียกว่า เหตุ และข้อความจริงใหม่ที่ได้เรียกว่า ผลสรุป ซึ่งถ้า พบว่าเหตุที่กำหนดนั้นบังคับให้เกิดผลสรุปไม่ได้ แสดงว่า การให้เหตุผลดังกล่าวสมเหตุสมผล แต่ถ้าพบว่าเหตุที่กำหนดนั้นบังคับให้เกิดผลสรุปไม่ได้แสดงว่า การให้เหตุผลดังกล่าวไม่สมเหตุสมผล

ตัวอย่าง เหตุ 1. คนทุกคนต้องหายใจ

2. นายเด่นต้องหายใจ

ผลสรุป นายเด่นต้องหายใจ

จะเห็นว่า จากเหตุที่ 1 และเหตุที่ 2 บังคับให้เกิดผลสรุป

ดังนั้นการให้เหตุผลนี้สมเหตุสมผลสมเหตุสมผล

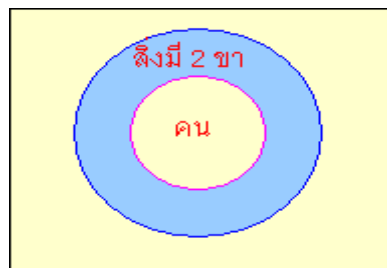
2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นการให้เหตุผลโดยอาศัยข้อสังเกตหรือผลการทดลองจากหลายๆตัวอย่าง มาสรุปเป็นข้อตกลง หรือข้อคาดเดาทั่วไป หรือ คำพยากรณ์และจะต้องมีข้อสังเกต หรือ ผลการทดลอง หรือ มี ประสบการณ์ที่มากพอที่จะปักใจเชื่อได้ แต่ก็ยังไม่สามารถแน่ใจในผลสรุปได้เต็มที่เหมือนกับการให้เหตุผลแบบ นิรนัย

ตัวอย่างการให้เหตุผลแบบอุปนัย เช่น เราเคยเห็นว่ามีปลาจำนวนมากที่ออกลูกเป็นไข่ เราจึงอนุมานว่า “ปลาทุกชนิดออกลูกเป็นไข่ ” ซึ่งกรณีนี้ถือว่าไม่สมเหตุสมผล ทั้งนี้เพราะข้อสังเกตหรือ ตัวอย่างที่พบว่ามีไม่มาก พอที่จะสรุป เพราะโดยข้อเท็จจริงแล้วมีปลาบางชนิดที่ออกลูกเป็นตัว เช่น ปลาหางนกยูง เป็นต้น

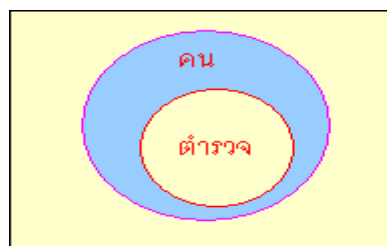
ตัวอย่างความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผลโดย

ตัวอย่างที่ 1	เหตุ 1 :	คนทุกคนเป็นสิ่งที่มีความซื่อสัตย์
	เหตุ 2 :	ตำรวจทุกคนเป็นคน
	ผลสรุป	ตำรวจทุกคนเป็นสิ่งที่มีความซื่อสัตย์

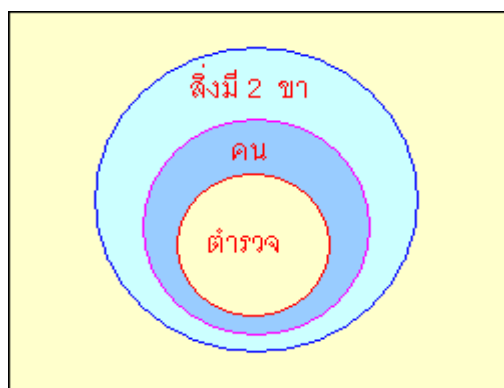
จากเหตุ 1



จากเหตุ 2



แผนภาพรวม



จากแผนภาพจะเห็นว่า วงของ " ตำรวจ " อยู่ในวงของ " สิ่งมี 2 ขาแสดง " แสดงว่า " ตำรวจทุกคนเป็น คนมีสองขา " ซึ่งสอดคล้องกับผลสรุปที่กำหนดให้ ดังนั้น การให้เหตุผลนี้สมเหตุสมผล การใช้ความสัมพันธ์ ระหว่างพจน์ ในการตรวจสอบความสมเหตุสมผล

จากแผนภาพจะเห็นว่า วงของ " ตำรวจ " อยู่ในวงของ " สิ่งมี 2 ขาแสดง " แสดงว่า " ตำรวจทุกคนเป็น คนมีสองขา " ซึ่งสอดคล้องกับผลสรุปที่กำหนดให้ ดังนั้น การให้เหตุผลนี้สมเหตุสมผล การใช้ความสัมพันธ์ ระหว่างพจน์ ในการตรวจสอบความสมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 1 เหตุ จำนวนตรรกยะทุกจำนวนเป็นจำนวนจริง
 1 เป็นจำนวนอตรรกยะ
 ผล 1 เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 2

เหตุ	คนไทยทุกคนเป็นผู้ที่ยิ้มแย้มแจ่มใส ชาวปากเซเป็นคนยิ้มแย้มแจ่มใส
ผล	ชาวปากเซเป็นคนไทย

นอกจากนี้ยังมีนักวิชาการทางคณิตศาสตร์ได้กล่าวถึงเกี่ยวกับตรรกศาสตร์มุมมองต่างๆ ดังนี้

ตรรกศาสตร์ เป็นวิชาที่ว่าด้วยกฎเกณฑ์และเหตุผล การได้มาของผลภายใต้กฎเกณฑ์ที่กำหนดถือเป็นสาระสำคัญ ข้อความหรือการให้เหตุผลในชีวิตประจำวันสามารถสร้างเป็นรูปแบบที่ชัดเจนจนใช้ประโยชน์ในการสรุปความ ความสมเหตุสมผลเป็นที่ยอมรับกันอย่างกว้างขวาง ตรรกศาสตร์เป็นแม่บทของคณิตศาสตร์แขนงต่าง ๆ และการประยุกต์

ประพจน์ (Propositions/Statement)

สิ่งแรกที่ต้องรู้จักในเรื่องตรรกศาสตร์คือ ประพจน์ ข้อความหรือประโยคที่มีค่าความจริง (T) หรือเท็จ (F) อย่างใดอย่างหนึ่ง ส่วนข้อความรูป คำสั่ง คำขอร้อง คำอุทาน คำปฏิเสธ ซึ่งไม่อยู่ในรูปของประโยคบอกเล่า จะเป็นข้อความที่ไม่เป็นประพจน์ สำหรับข้อความบอกเล่าแต่มีตัวแปรอยู่ด้วย ไม่สามารถบอกว่าเป็นจริงหรือเท็จจะไม่ใช่ประพจน์ เรียกว่าประโยคเปิด ประโยคที่มีค่าความจริงไม่แน่นอน หรือไม่อาจจะบอกได้ว่ามีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จได้ ไม่เป็นประพจน์

การเชื่อมประพจน์

โดยปกติเมื่อกล่าวถึงข้อความหรือประโยคนั้นมักจะมีกริยามากกว่าหนึ่งตัว แสดงว่าได้นำประโยคมาเชื่อมกัน มากกว่าหนึ่งประโยค ดังนั้นถ้านำประพจน์มาเชื่อมกัน ก็จะได้ประพจน์ใหม่ ซึ่งสามารถบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ตัวเชื่อมประพจน์มีอยู่ 5 ตัว และตัวเชื่อมที่ใช้กันมากในตรรกศาสตร์คือ และ / หรือ / ถ้า...แล้ว / ก็ต่อเมื่อ / ไม่

ตัวเชื่อมประพจน์ “และ”

การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “และ” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $p \wedge q$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นจริง (T) เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเป็นจริง (T) ทั้งคู่ นอกนั้นมีค่าความจริงเป็นเท็จ (F)

ตัวเชื่อมประพจน์ “หรือ”

การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “หรือ” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $p \vee q$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นเท็จ (F) เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จ (F) ทั้งคู่ นอกนั้นมีค่าความจริงเป็นจริง (T)

ตัวเชื่อมประพจน์ “ถ้า...แล้ว”

การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “ถ้า...แล้ว” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $p \rightarrow q$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นเท็จ (F) เมื่อ p เป็นจริง (T) และ q เป็นเท็จ (F) นอกนั้นีมีค่าความจริงเป็นจริง (T)

ตัวเชื่อมประพจน์ “ก็ต่อเมื่อ”

การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “ก็ต่อเมื่อ” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $p \Leftrightarrow q$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นจริง (T) เมื่อ p และ q มีค่าความจริงตรงกัน และจะมีค่าความจริงเป็นเท็จ (F) เมื่อ p และ q มีค่าความจริงตรงข้ามกัน

นิเสธของประพจน์ “ไม่”

นิเสธของประพจน์ใดๆ คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงกันข้ามกับประพจน์นั้นๆ และสามารถเขียนแทนนิเสธของ p ได้ด้วย $\sim p$

ตารางค่าความจริง

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

ประพจน์ที่สมมูลกัน

ประพจน์ 2 ประพจน์จะสมมูลกัน ก็ต่อเมื่อ ประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงเหมือนกัน ทุกกรณีของค่าความจริงของประพจน์ย่อย การทดสอบว่าประพจน์ 2 ประพจน์ สมมูลกัน ทำได้ 2 วิธีคือ สร้างตารางแจกแจงค่าความจริง ค่าความจริงต้องตรงกันทุกกรณี โดยการใช้หลักความจริงและประพจน์ที่สมมูลกันแบบง่ายที่ควรจำ เพื่อแปลงรูปประพจน์ไปเป็นแบบเดียวกัน

ตัวอย่างประพจน์ที่สมมูลกันที่ควรทราบ มีดังนี้

- $p \wedge q$ สมมูลกับ $q \wedge p$
- $p \vee q$ สมมูลกับ $q \vee p$
- $(p \wedge q) \wedge r$ สมมูลกับ $p \wedge (q \wedge r)$
- $(p \vee q) \vee r$ สมมูลกับ $p \vee (q \vee r)$
- $p \wedge (q \vee r)$ สมมูลกับ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \vee (q \wedge r)$ สมมูลกับ $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $p \rightarrow q$ สมมูลกับ $\sim p \vee q$
- $p \rightarrow q$ สมมูลกับ $\sim q \rightarrow \sim p$
- $p \Leftrightarrow q$ สมมูลกับ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

ประพจน์ที่เป็นนิเสธกัน

ประพจน์ 2 ประพจน์เป็นนิเสธกัน ก็ต่อเมื่อ ประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงตรงข้ามกันทุกกรณีของค่าความจริงของประพจน์ย่อย ตัวอย่างประพจน์ที่เป็นนิเสธกันที่ควรทราบ มีดังนี้

- $\sim(p \wedge q)$ สมมูลกับ $\sim p \vee \sim q$
- $\sim(p \vee q)$ สมมูลกับ $\sim p \wedge \sim q$
- $\sim(p \rightarrow q)$ สมมูลกับ $p \wedge \sim q$

$\sim(p \Leftrightarrow q)$ สมมูลกับ $(p \Leftrightarrow \sim q) \vee (q \Leftrightarrow \sim p)$

$\sim(p \Leftrightarrow q)$ สมมูลกับ $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

สัจนิรันดร์

สัจจะ แปลว่าจริง ส่วนนิรันดร์ แปลว่าตลอดกาล ประพจน์ที่เป็นสัจนิรันดร์ คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง ทุกกรณีของประพจน์ย่อย

ประโยคเปิด (Open Sentence) คือข้อความที่อยู่ในรูปประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธ ที่มีตัวแปรและสื่อแทนค่าของตัวแปรนั้น จะได้ค่าความจริงแน่นอน หรือเป็นประพจน์ นิยมใช้สัญลักษณ์ $P(x)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ แทนประโยคเปิดที่มีตัวแปรระบุในวงเล็บ

ตัวบ่งปริมาณ ($\forall, \exists$)

ตัวบ่งปริมาณ เป็นตัวระบุจำนวนสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ที่ทำให้ประโยคเปิดกลายเป็นประพจน์ ตัวบ่งปริมาณมี 2 ชนิด คือ

ตัวบ่งปริมาณที่กล่าวถึง “สมาชิกทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์” ซึ่งเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ “ $\forall$ ” อ่านว่า “สำหรับสมาชิก x ทุกตัว”

ตัวบ่งปริมาณที่กล่าวถึง “สมาชิกบางตัวในเอกภพสัมพัทธ์” ซึ่งเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ “ $\exists$ ” อ่านว่า “สำหรับสมาชิก x บางตัว”

ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

$\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ x ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

$\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อมี x อย่างน้อย 1 ตัวที่ทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ

$\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อมี x อย่างน้อย 1 ตัวที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

$\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อไม่มี x ใดๆ ในเอกภพสัมพัทธ์ที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

นิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

$\sim \forall x[P(x)]$ สมมูลกับ $\exists x[\sim P(x)]$

$\sim \exists x[P(x)]$ สมมูลกับ $\forall x[\sim P(x)]$

$\sim \forall x[\sim P(x)]$ สมมูลกับ $\exists x[P(x)]$

$\sim \exists x[\sim P(x)]$ สมมูลกับ $\forall x[P(x)]$

การอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผล คือ การอ้างว่า “สำหรับเหตุการณ์ $P_1, P_2, \dots, P_n$ ชุดหนึ่ง สามารถสรุปผลที่ตามมา C ได้” การอ้างเหตุผลนี้ ได้รับเลือกเป็นตัวแทนของ ข้อสอบในเรื่องตรรกศาสตร์ ให้เป็นข้อสอบเข้ามหาวิทยาลัย อย่าง O-Net และ PAT1 บ่อยๆ จึงเป็นเรื่องที่สำคัญมาก

การอ้างเหตุผลประกอบด้วย 2 ส่วน คือ

เหตุ หรือสิ่งที่กำหนดให้

ผล หรือสิ่งที่ตามมา

คำถามท้ายบท¹¹

ตอนที่ 1 เลือกข้อที่เห็นว่าถูกต้อง

ข้อ 1. $[p \rightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge [\sim r \vee (q \vee \sim q)]$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\sim r$

ข. $\sim p$

ค. q

ง. $p \vee \sim r$

ข้อ 2. ถ้าค่าความจริงของ $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))$ เป็นเท็จ
ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้ มีค่าเป็นจริง

ก. $(A \wedge B) \wedge C$

ข. $(A \wedge \sim B) \wedge \sim C$

ค. $\sim(A \wedge B) \vee C$

ง. $(A \wedge \sim B) \vee \sim C$

ข้อ 3. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้และสรุป

(1) กำหนด $\sim p \wedge q$ เป็นจริง แล้ว $(\sim p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee q)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

(2) กำหนด $p \wedge q$ เป็นจริง และ $q \rightarrow r$ เป็นเท็จ แล้ว $[(p \wedge q) \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

(3) ถ้า $p \wedge q$ เป็นจริง และ $p \rightarrow (r \vee s)$ เป็นเท็จ แล้ว $[(\sim p \wedge q) \rightarrow t] \leftrightarrow (r \vee \sim s)$ มีค่าเป็นจริง

ก. ถูก 1 ข้อ

ข. ถูก 2 ข้อ

ค. ถูก 3 ข้อ

ง. ผิดทุกข้อ

ข้อ 4. ข้อใดเป็นนิเสธของข้อความ

ถ้าวันนี้ฝนไม่ตก แล้วนายแดงจะไปเที่ยว

ก. วันนี้ฝนตก หรือนายแดงไปเที่ยว

ข. วันนี้ฝนไม่ตก และนายแดงไม่ไปเที่ยว

ค. วันนี้ฝนไม่ตก หรือนายแดงไปเที่ยว

ง. วันนี้ฝนตก และนายแดงไปเที่ยว

ข้อ 5. จงพิจารณาข้อความ

(1) $(p \rightarrow \sim p) \leftrightarrow \sim(p \wedge q)$ เป็นสัจนิรันดร์

(2) $[(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p] \rightarrow (p \rightarrow q)$ เป็นสัจนิรันดร์

ข้อใดถูก

ก. (1) ถูกเพียงข้อเดียว

ข. (2) ถูกเพียงข้อเดียว

ค. (1) และ (2) ถูก

ง. (1) และ (2) ผิด

ข้อ 6. ข้อใดต่อไปนี้ไม่เป็นสัจนิรันดร์

ก. $[\sim p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

ข. $[p \wedge (\sim q \wedge \sim r)] \vee [(p \rightarrow q) \vee r]$

ค. $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)]$

ง. $(p \rightarrow q) \wedge (r \vee \sim p) \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

ข้อ 7. ประพจน์ใดเป็นสัจนิรันดร์

ก. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

ข. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow q)$

¹¹ อ่านต่อได้ที่: <https://www.gotoknow.org/posts/334106>, 22 เมษายน 2558.

ค. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

ง. $[\sim p \wedge \sim q] \leftrightarrow [\sim p \vee \sim q]$

ข้อ 8. ประพจน์ใดมีค่าความจริงเป็นเท็จทุกกรณี

ก. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

ข. $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$

ค. $(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

ง. $[p \wedge (p \vee q)] \rightarrow p$

ข้อ 9. ถ้าประโยค

นกมีหู หรือ หนูมีปีก

มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้วข้อใดเป็นเท็จ

ก. นกมีหู และ หนูมีปีก

ค. ถ้านกมีหู แล้วหนูมีปีก

ข. นกมีหู ก็ต่อเมื่อ หนูมีปีก

ง. ถ้านกมีหู แล้วหนูไม่มีปีก

ข้อ 10. ข้อใดต่อไปนี้ไม่สมมูลกัน

ก. $p \rightarrow q : \sim p \vee q$

ค. $p \leftrightarrow q : (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

ข. $\sim (\sim p) : p$

ง. $p \rightarrow q : \sim p \wedge q$

ข้อ 11. ข้อใดต่อไปนี้ไม่สมมูลกัน

ก. $p \wedge q : q \wedge p$

ค. $p \rightarrow q : q \rightarrow p$

ข. $p \vee q : q \vee p$

ง. $p \leftrightarrow q : q \leftrightarrow p$

ข้อ 12. จากความจริงที่ว่า

คนมีสองขา สุนัขมีสี่ขา

จะสรุปได้ว่า

ก. ถ้า ก มีสองขา แล้ว ก เป็นคน

ข. ถ้า ก ไม่เป็นคน แล้ว ก ไม่มีสองขา

ค. ถ้า ก มีสี่ขา แล้ว ก เป็นสุนัข

ง. ถ้า ก ไม่มีขาแล้ว ก ไม่เป็นคน และไม่เป็นสุนัข

ข้อ 13. แม่สัญญากับลูกว่า

ถ้าลูกสอบได้ที่หนึ่ง แม่จะให้รางวัล

จะถือว่าแม่ผิดสัญญากรณีใด

ก. ลูกสอบได้ที่หนึ่ง และแม่ให้รางวัลลูก

ข. ลูกสอบตก และแม่ให้รางวัล

ค. ลูกสอบได้ที่สี่ และแม่ไม่ให้รางวัล

ง. ลูกสอบได้ที่หนึ่ง และแม่ไม่ให้รางวัล

เฉลย

1. ข 2. ง 3. ค 4. ข 5. ข 6. ก 7. ค 8. ง 9. ก 10. ง 11. ค 12. ง 13. ง

ตอนที่ 2 เขียนตอบโจทย์ดังต่อไปนี้

ข้อ 14. จงอธิบายความหมายของคำว่า ตรรกศาสตร์ คืออะไร ?

ข้อ 15. จงอธิบายความหมายของคำว่า ประพจน์ คืออะไร พร้อมยกตัวอย่างประกอบ 10 ตัวอย่าง

- ข้อ 16. การเชื่อมประพจน์ด้วย “และ” มีหลักการอย่างไร ? จงอธิบาย
- ข้อ 17. การเชื่อมประพจน์ด้วย “ หรือ ” มีหลักการอย่างไร ? จงอธิบาย
- ข้อ 18. การเชื่อมประพจน์ด้วย “ ถ้า.....แล้ว ” มีหลักการอย่างไร ? จงอธิบาย
- ข้อ 19. การเชื่อมประพจน์ด้วย “ ก็ต่อเมื่อ ” มีหลักการอย่างไร ? จงอธิบาย
- ข้อ 20. การเชื่อมประพจน์ด้วย “นิเสธ” มีหลักการอย่างไร ? จงอธิบาย
- ข้อ 21. จงแสดงค่าความจริงโดยการเชื่อมประพจน์เหล่านี้ด้วย “และ” “หรือ”

P = นกเป็นสัตว์ปีกบินได้ Q = ปลาไม่เป็นสัตว์น้ำ R = งูเป็นสัตว์น้ำ

โดยแสดงค่าความจริงได้ภายใต้เงื่อนไขว่า $(P \wedge Q) \vee R \leftrightarrow P$

บทที่ 4

เซต¹²

4.1 ความหมายของเซต

เซตเป็นคำที่ใช้บ่งบอกถึงกลุ่มของสิ่งต่างๆ และเมื่อกล่าวถึงกลุ่มใดแน่นอนว่าสิ่งใดอยู่ในกลุ่ม สิ่งใดไม่อยู่ในกลุ่ม หรือ เซตเป็นคำที่ไม่ให้นิยาม (Undefined Term) เรามักใช้เซตแทนสิ่งที่อยู่ร่วมกัน ซึ่งหมายถึงกลุ่มของสิ่งต่างๆ ที่เราสามารถกำหนดสมาชิกได้ชัดเจน (Well-Defined) หรือก็คือความหมายของเซตนั่นเอง

ตัวอย่างเช่น

เซตสระในภาษาอังกฤษ หมายถึง กลุ่มของสระภาษาอังกฤษ a, e, i, o และ u

เซตของจำนวนนับที่น้อยกว่า 10 หมายถึง กลุ่มตัวเลข 1,2,3,4,5,6,7,8,และ9

สิ่งที่ในเซตเรียกว่า สมาชิก (element หรือ members) เขียนแทนสัญลักษณ์ว่า E

ในเบื้องต้นนั้น ต้องกำหนดให้มีเซตก่อนโดยการแทนด้วยอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่และในส่วนสมาชิคนั้นขึ้นว่าจะเป็นสิ่งใดเหมือนที่ตัวอย่างข้างต้นว่า เซตสระในภาษาอังกฤษ แต่ยังไม่รู้ว่าเป็นเซตอะไร รู้เพียงเพียงแต่ว่า กลุ่มของสระในภาษาอังกฤษ แต่ถ้ากำหนดว่า $A = \{ a, e, i, o, u \}$

การที่จะบอกสมาชิกของเซตก็ชัดเจนมากยิ่งขึ้นจึงสรุปได้ว่า การเป็นสมาชิกของเซตนั้นจะต้องมีชื่อเซตตามลักษณะของตัวอย่างกล่าวได้ว่า aEA, eEA, iEA, oEA และ uEA

4.2 การเขียนเซต

การเขียนเซตอาจเขียนได้ 2 แบบ

1. การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก คือ การเขียนสมาชิกทุกตัวลงในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา {} และใช้เครื่องหมายจุลภาค (,) คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว

ตัวอย่างเช่น

เซตของจำนวนนับที่น้อยกว่า 7 เขียนแทนด้วย {1,2,3,4,5,6}

เซตของพยัญชนะไทย 5 ตัวแรก เขียนแทนด้วย { ก,ข,ฃ,ค,ฅ }

2. เขียนแบบบอกเงื่อนไขคือ การใช้ตัวแปร (X , Y) เขียนแทนสมาชิกของเซตแล้วบรรยายสมบัติของสมาชิกที่อยู่ในรูปของตัวแปร

ตัวอย่างเช่น

$\{ x | x \text{ เป็นสระในภาษาอังกฤษ} \}$ อ่านว่า เซตของ x โดยที่ x เป็นสระในภาษาอังกฤษ

$\{ x | x \text{ เป็นเดือนแรกและเดือนสุดท้ายของปี} \}$ อ่านว่า เซตของ x โดยที่ x เป็นเดือนแรกและเดือนสุดท้ายของปี เครื่องหมาย “ | ” แทนคำว่า โดยที่

ในการเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิคนั้นจะใช้จุด (...) เพื่อแสดงว่ามีสมาชิกอื่นๆ ซึ่งเป็นที่เข้าใจกันทั่วไปว่ามีอะไรบ้างที่อยู่ในเซต

ตัวอย่างเช่น

$\{ 1,2,3,...,10 \}$ สัญลักษณ์ ... แสดงว่ามี 4,5,6,7,8 และ 9 เป็นสมาชิกของเซต

¹² <http://www.tewfree.com>, 23 เมษายน 2558

{ วันจันทร์, อังคาร, พุธ,..., อาทิตย์ } สัญลักษณ์ ... แสดงว่ามีวันหยุดห้านาที วันศุกร์ และวันเสาร์ เป็นสมาชิกของเซต

4.3 สัญลักษณ์แทนเซต

ในการเขียนเซตโดยที่ทั่วไปจะแทนเซตด้วยอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น A,B,C และแทนสมาชิกของเซตด้วยตัวพิมพ์เล็ก เช่น a,b,c

ตัวอย่างเช่น

$A = \{1,4,9,16,25,36\}$ หมายถึง A เป็นเซตของกำลังสองของจำนวนนับหกจำนวนแรก }

สมาชิกของเซตจะใช้สัญลักษณ์ “ $\in$ ” แทนคำว่าเป็นสมาชิกหรืออยู่ใน

ตัวอย่างเช่น $A = \{1,2,3,4\}$

จะได้ว่า 1 เป็นสมาชิกของ A หรืออยู่ใน A เขียนแทนด้วย $1 \in A$

3 เป็นสมาชิกของ A หรืออยู่ใน A เขียนแทนด้วย $3 \in A$

คำว่า “ไม่เป็นสมาชิก” หรือ “ไม่อยู่ใน” เขียนด้วยสัญลักษณ์ “ $\in$ ” เช่น

5 ไม่เป็นสมาชิกของ A หรือไม่อยู่ใน A เขียนแทนด้วย $5 \notin A$

7 ไม่เป็นสมาชิกของ A หรือไม่อยู่ใน A เขียนแทนด้วย $7 \notin A$

สำหรับเซต A ซึ่งมีสมาชิก 4 ตัว เราจะใช้ $n(A)$ เพื่อบอกจำนวนสมาชิกของเซต A นั่นคือ $n(A) = 4$

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

1.เซตของจังหวัดในประเทศไทยที่ลงท้ายด้วยบุรี

2.เซตของจำนวนลบ

3.เซตของพยัญชนะในภาษาไทย

วิธีทำ

1. ให้ A เป็นเซตของจังหวัดในประเทศไทยที่ลงท้ายด้วยบุรี

$A = \{ สุพรรณบุรี, ปราจีนบุรี, สิงห์บุรี,..., ลพบุรี \}$

2. ให้ B เป็นเซตของจำนวนเต็มลบ

$B = \{-1,-2,-3,...\}$

3. ให้ C เป็นเซตของพยัญชนะในภาษาไทย

$C = \{ก,ข,ค,...,ฮ\}$

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบบอกเงื่อนไข

1. $A = \{2,4,6,8,10\}$

2. $B = \{1,3,5,7\}$

วิธีทำ

1. $A = \{x | x \text{ เป็นจำนวนคู่บวกที่น้อยกว่า } 12 \}$

2. $B = \{x | x \text{ เป็นจำนวนคี่บวกที่น้อยกว่า } 9 \}$

4.4. ประเภทของเซต

4.4.1 เซตว่าง

เซตว่าง คือ เซตที่ไม่มีสมาชิก สัญลักษณ์ที่ใช้ในเซตว่าง คือ $\{ \}$ หรือ (ϕ) (อ่านว่าไฟ (phi))

ตัวอย่างของเซตว่าง ได้แก่ $A = \{ x | x \text{ เป็นจังหวัดในประเทศไทยที่ขึ้นต้นด้วย "ข"} \}$

4.4.2 เซตจำกัด

เซตจำกัด คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกสามารถนับได้ ตัวอย่างเซตจำกัด ได้แก่

$$A = \{ 0, 2, 4, \dots, 10 \}, n(A) = 11$$

$$B = \{ x \mid x \text{ เป็นพยัญชนะในคำว่า "เซตว่าง" } \}, n(A) = 4$$

$$C = \{ 1, 2, \dots, 8 \}$$

4.4.3 เซตอนันต์

เซตอนันต์ คือ เซตที่มีจำนวนมากมายและนับไม่ถ้วน ตัวอย่างเซตอนันต์ ได้แก่

$$A = \{ x \mid x \text{ เป็นจำนวนเฉพาะที่มากกว่า 5} \}$$

$$B = \{ x \mid x \times 3, 7, 11, 15, \dots \}$$

$$C = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

ข้อตกลงเกี่ยวกับเซต

1. เซตว่างเป็นเซตจำกัด

2. การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิกเขียนสมาชิกแต่ละตัวเพียงครั้งเดียวเท่านั้น เช่น เซตของเลขโดดที่อยู่ในจำนวน 232 คือ $\{2, 3\}$

3. เซตของจำนวนที่มักจะกล่าวถึงเสมอและใช้กันทั่วไป มีดังนี้

$$\mathbb{I} \pm \text{ เป็นเซตของจำนวนเต็ม หรือ } \mathbb{I} \pm = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

$$\mathbb{I} + \text{ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก หรือ } \mathbb{I} + = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

$$\mathbb{I} - \text{ เป็นเซตของจำนวนเต็มลบ หรือ } \mathbb{I} - = \{ -1, -2, -3, \dots \}$$

$$\mathbb{N} \text{ เป็นเซตของจำนวนนับ หรือ } \mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

$$\mathbb{P} \text{ เป็นเซตของจำนวนเฉพาะ หรือ } \mathbb{P} = \{ 2, 3, 5, 7, \dots \}$$

4.4.4 เซตที่เท่ากัน

เซต $A = B$ หมายถึง สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิก ของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A เท่ากับเซต B เขียนแทนด้วย $A = B$ และเซต A ไม่เท่ากับเซต B หมายความว่า มีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวของเซต A ที่ไม่ใช่สมาชิกของเซต B หรือมีสมาชิกอย่างน้อยของเซต B ที่ไม่ใช่สมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $A \neq B$

ตัวอย่างที่ 1 $A = \{0, 1, 2\}$ และ $B = \{2, 0, 1\}$

ดังนั้น เซต A เท่ากันกับเซต B เขียนแทนด้วย $A = B$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $A = \{1, 1, 2, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 1, 2, 4, 5, 6\}$, $C = \{1, 2, 4, 5, 5, 6, 7, 8\}$

จงหาว่ามีเซตใดบ้างที่เท่ากัน

วิธีทำ

$$A = \{1, 1, 2, 4, 5, 6\}, B = \{2, 1, 2, 4, 5, 6\}, C = \{1, 2, 4, 5, 5, 6, 7, 8\}$$

จะได้ $A = B$ เพราะมีสมาชิกเหมือนกันทุกตัว

แต่ $A \neq C$, $B \neq C$ เพราะว่า $7 \in A$ และ $7 \in B$

4.5. เอกภพสัมพัทธ์

การเขียนเซตบอกเงื่อนไขของสมาชิกจะต้องกำหนดเซตของเอกภพสัมพัทธ์ เขียนแทนด้วย U โดยมีข้อตกลงว่า เมื่อกล่าวถึงสมาชิกของเซต จะไม่กล่าวถึงสิ่งอื่นนอกเหนือจากสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์

ตัวอย่างที่ 1 $U = \{x \mid x \text{ เป็นพยัญชนะในภาษาไทย} \}$

และ $\{x \mid x \text{ เป็นพยัญชนะในภาษาไทย 3 ตัวแรก} \}$

จงเขียนเซต A แบบแจกแจงสมาชิก

วิธีทำ $U = \{ก, ข, ค, \dots, ฮ\}$
 ดังนั้น $A = \{ก, ข, ค\}$
 ตัวอย่างที่ 2 $U = \{1, 2, 3, \dots\}$, $B = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนนับที่น้อยกว่า } 5\}$
 จงเขียน B แบบแจกแจงสมาชิก
 วิธีทำ $U = \{1, 2, 3, \dots\}$
 ดังนั้น $B = \{1, 2, 3, 4\}$

4.6 สับเซตและเพาเวอร์เซต¹³

4.6.1 สับเซต

เซต A เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B เขียนแทนด้วย $A \subset B$ และ เซต A ไม่เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวของเซต A ที่ไม่เป็นสมาชิกของเซต B เขียนแทนด้วย $A \not\subset B$ เช่น

กำหนดให้ $A = \{3, 5\}$ และ $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

จะได้ว่า $A \subset B$ แต่ $B \not\subset A$

สมบัติของสับเซต

- 1) $A \subset A$ (เซตทุกเซตเป็นสับเซตของตัวเอง)
- 2) $A \subset U$ (เซตทุกเซตเป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์)
- 3) $\emptyset \subset A$ (เซตว่างเป็นสับเซตของทุกๆ เซต)
- 4) ถ้า $A \subset \emptyset$ แล้ว $A = \emptyset$
- 5) ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$ (สมบัติการถ่ายทอด)
- 6) $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$
- 7) ถ้า A มีจำนวนสมาชิก n ตัว สับเซตของเซตจะมีทั้งสิ้น 2^n สับเซต

สับเซตแท้

นิยาม A เป็นสับเซตแท้ของ B ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $A \neq B$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{a, b, c\}$ จงหาสับเซตแท้ทั้งหมดของ A

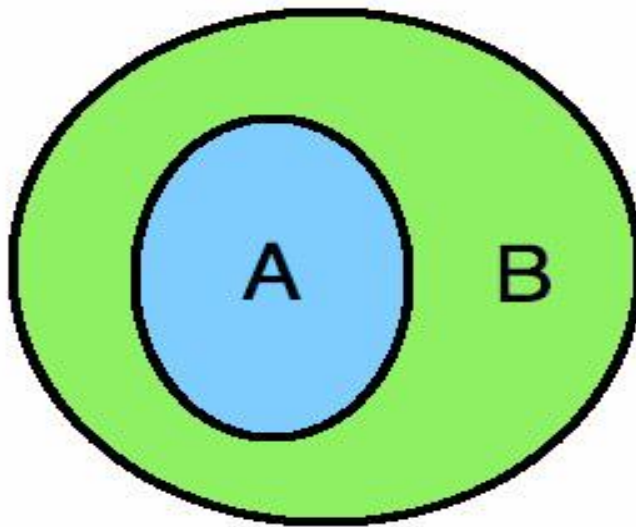
วิธีทำ สับเซตแท้ของ A ได้แก่ $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$

มีจำนวนสมาชิกทั้งสิ้น 7 สับเซต

หมายเหตุ

ถ้า A มีจำนวนสมาชิก n ตัว สับเซตแท้ของเซต A จะมีทั้งสิ้น $2^n - 1$ สับเซต

เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของสับเซตออกมาในรูปของแผนภูมิได้ดังนี้
จากรูปแสดงได้ว่า $A \subset B$



4.6.2 เพาเวอร์เซต

เพาเวอร์เซตของเซต A คือ เซตของสับเซตทั้งหมดของ A เขียนแทนด้วย $P(A)$
หมายความว่า $P(A)$ คือเซตที่มีสับเซตทั้งหมดของ A เป็นสมาชิก

กำหนดให้ $A = \{2, 4, 6\}$

จะได้ว่า เพาเวอร์เซตของเซต A คือ

$$P(A) = \{ \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}, \text{เซตว่าง} \}$$

สมบัติของเพาเวอร์เซต

ให้ A, B เป็นเซตใดๆ

- 1) $\emptyset \subset P(A)$
- 2) $A \subset P(A)$
- 3) $P(A) \neq \emptyset$
- 4) $P(A) \subset P(B)$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$
- 5) ถ้า A มีสมาชิก n ตัว $P(A)$ จะมีสมาชิก 2^n ตัว

4.7 แผนภาพเวนน-ออยเลอร์¹⁴

แผนภาพเวนน-ออยเลอร์ (เซต) มีความสำคัญมากในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับโจทย์ปัญหาของเซต เน้นที่การหาจำนวนสมาชิกของเซตภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้ ซึ่งเราสามารถแก้ปัญหาการหาจำนวนสมาชิกของเซตโดยทั่วไป

¹⁴ <http://www.tewfree.com> , 23 เมษายน 2558.

แผนภาพออยเลอร์ (Euler diagram)

แผนภาพออยเลอร์ (Euler diagram) เป็นแผนภาพที่ใช้ในการอธิบายความสัมพันธ์ของเซตต่าง ๆ โดยให้วงกลมแต่ละวงแทนแต่ละเซต และแสดงความสัมพันธ์ของแต่ละเซตด้วย การครอบคลุมซึ่งแสดงความเป็นสับเซต การทับซ้อนกัน หรือการไม่ทับซ้อนกันซึ่งแสดงว่าทั้งสองเซตไม่มีความสัมพันธ์กัน ลักษณะแผนภาพวงกลมเช่นนี้เชื่อว่าถูกใช้ครั้งแรกโดยนักคณิตศาสตร์ชาวสวิสนามว่า เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ แผนภาพออยเลอร์นั้นยังมีลักษณะคล้ายคลึงกันกับแผนภาพเวนน์มาก ในทฤษฎีเซตซึ่งเป็นแขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์จึงนิยมใช้แผนภาพประยุกต์จากแผนภาพทั้งสองในการอธิบายเซตต่าง ๆ ให้เข้าใจได้ง่ายยิ่งขึ้น

แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ (Venn-Euler diagram)

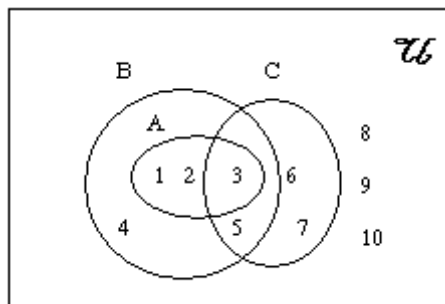
แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ เป็นแผนภาพแสดงความเกี่ยวข้องของเซตต่าง ๆ ซึ่งชื่อที่ใช้เรียกเป็นชื่อของนักคณิตศาสตร์สองคน คือ จอห์น เวนน์ และ เลโอนาร์ด ออยเลอร์

การเขียนแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์

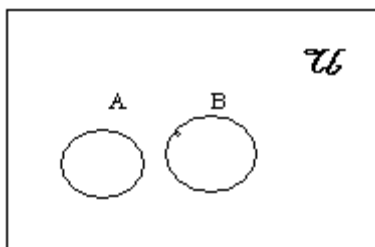
การเขียนแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ มักเขียนแทนเอกภพสัมพัทธ์ U ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือรูปปิดใด ๆ ส่วนเซต $A, B, C, D, \dots$ ซึ่งเป็นเซตย่อยของ U อาจเขียนแทนด้วยวงกลมหรือวงรีหรือรูปปิดใด ๆ โดยให้ภาพที่แทนเซตย่อยอยู่ในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่แทนเอกภพสัมพัทธ์

ถ้ากำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{3, 5, 6, 7\}$

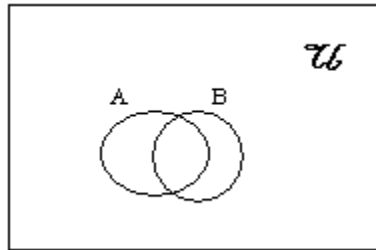
เราจะเขียนแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ แสดงเอกภพสัมพัทธ์ U และเซตย่อยต่าง ๆ ดังแผนภาพต่อไปนี้



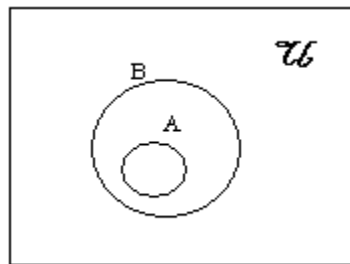
ถ้าเซต A และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกันแผนภาพมีลักษณะดังนี้



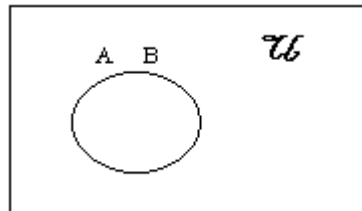
ถ้าเซต A และ B มีสมาชิกร่วมกันบางส่วน (ไม่ทั้งหมด) แผนภาพมีลักษณะดังนี้



ถ้า $A \subset B$ แต่ $A \neq B$ แผนภาพจะมีลักษณะดังนี้



ถ้า $A=B$ แผนภาพมีลักษณะดังนี้



4.8 ยูเนียน อินเตอร์เซกชัน และคอมพลิเมนต์ของเซต¹⁵

ยูเนียน อินเตอร์เซกชัน และคอมพลิเมนต์ของเซต เป็นส่วนหนึ่งของการกระทำระหว่างเซต เรานิยมเขียนออกมาในสองรูปแบบด้วยกันคือแบบสมการ และแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ เราลองมาดูกันครับว่ายูเนียน อินเตอร์เซกชัน และคอมพลิเมนต์ของเซต เป็นอย่างไรพร้อมตัวอย่าง

4.8.1 ยูเนียน (Union)

ยูเนียน (Union) มีนิยามว่า เซต A ยูเนียนกับเซต B คือเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นสมาชิกของเซต A หรือ เซต B หรือทั้ง A และ B สามารถเขียนแทนได้ด้วย สัญลักษณ์ $A \cup B$

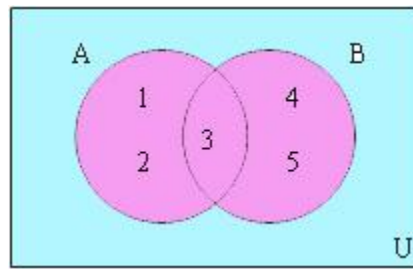
ตัวอย่างเช่น

$$A = \{1,2,3\}$$

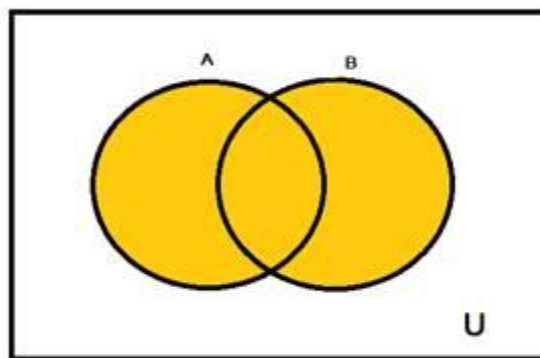
$$B = \{3,4,5\}$$

$$\therefore A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$$

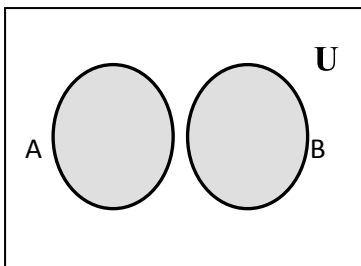
เราสามารถเขียนการยูเนียนลงในแผนภาพได้ดังนี้



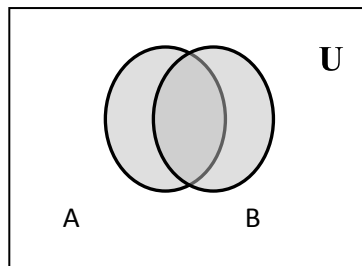
รูปแบบที่ 2 $A \cup B = \{x | x \text{ เป็นสมาชิกของ } A \text{ หรือ } x \text{ เป็นสมาชิกของ } B\}$



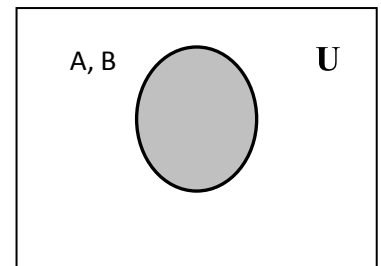
ข้อสังเกต เซต 2 เซตมายูเนียนกัน เหมือนกับเอาเซต 2 เซต มารวมกัน ดังนั้น เซตที่เกิดจากการยูเนียนจะต้องมีจำนวนสมาชิกเพิ่มขึ้นหรืออย่างน้อยเท่าเดิม ใช้แผนภาพมาช่วยในการพิจารณา ซึ่งส่วนที่แรเงา ต่อไปนี้เป็นส่วนที่เป็นยูเนียนของ A กับ B



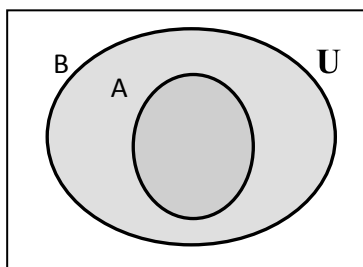
กรณีที่ 1



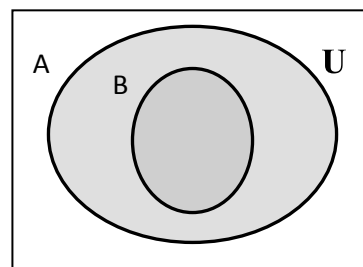
กรณีที่ 2



กรณีที่ 3



กรณีที่ 4



กรณีที่ 5

4.8.2 อินเตอร์เซกชัน (Intersection)

อินเตอร์เซกชัน (Intersection) มีนิยามคือ เซต A อินเตอร์เซกชันเซต B คือ เซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นสมาชิกของเซต A และเซต B สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $A \cap B$

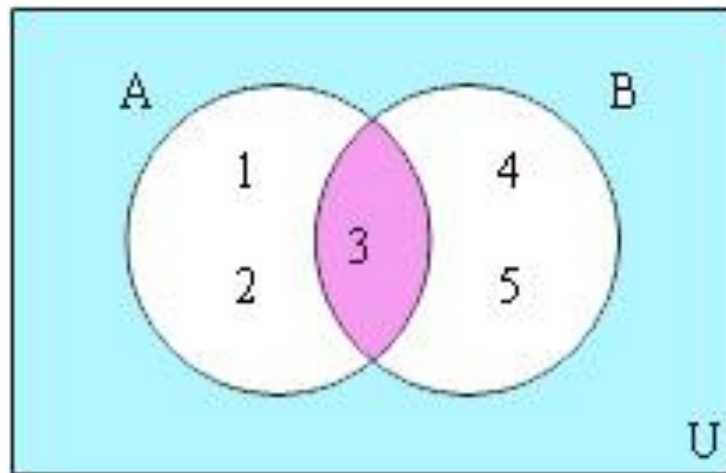
ตัวอย่างเช่น

$$A = \{1, 2, 3\}$$

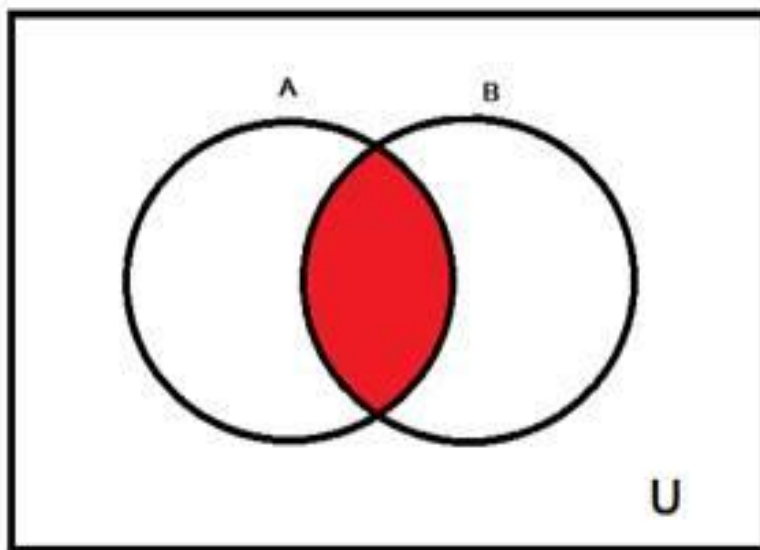
$$B = \{3, 4, 5\}$$

$$\therefore A \cap B = \{3\}$$

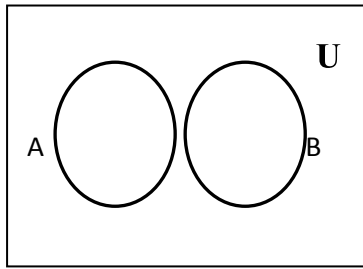
เราสามารถเขียนการอินเตอร์เซกชันลงในแผนภาพได้ดังนี้



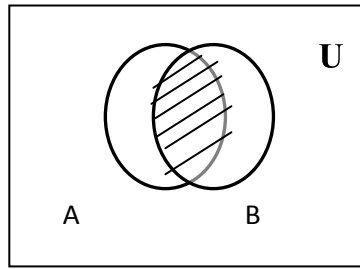
รูปแบบที่ 2 $A \cap B = \{x \mid x \text{ เป็นสมาชิกของ } A \text{ และ } x \text{ เป็นสมาชิกของ } B\}$



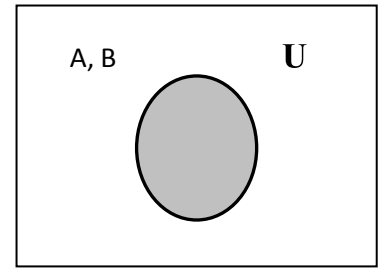
ใช้แผนภาพมาช่วยในการพิจารณา ซึ่งส่วนที่แรเงา ต่อไปนี้เป็นส่วนที่เป็นอินเตอร์เซกชัน ของ A กับ B



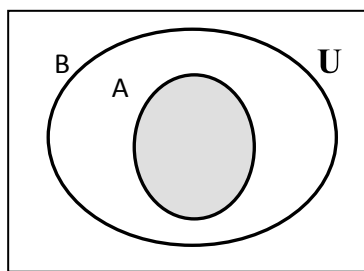
กรณีที่ 1



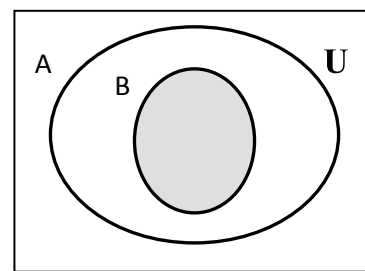
กรณีที่ 2



กรณีที่ 3



กรณีที่ 4



กรณีที่ 5

4.8.3 คอมพลีเมนต์ (Complements)

คอมพลีเมนต์ (Complements) มีนิยามคือ ถ้าเซต A ใดๆ ในเอกภพสัมพัทธ์ U แล้วคอมพลีเมนต์ของเซต A คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นสมาชิกของ U แต่ไม่เป็นสมาชิกของ A สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ A'

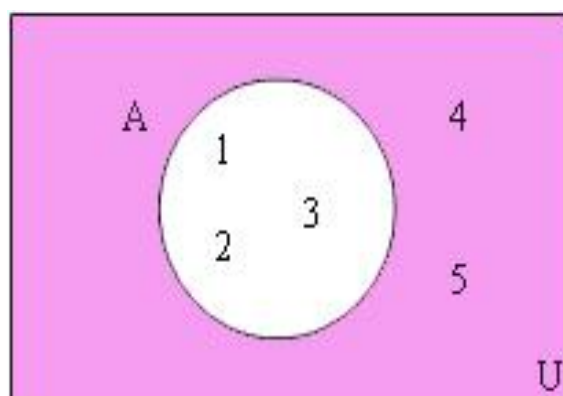
ตัวอย่างเช่น

$$U = \{1,2,3,4,5\}$$

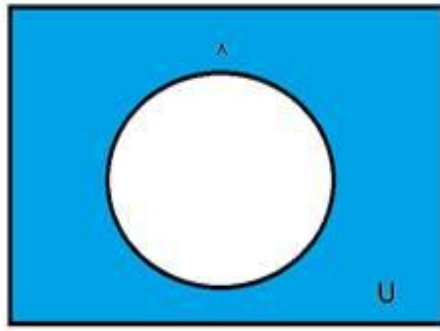
$$A = \{1,2,3\}$$

$$\therefore A' = \{4,5\}$$

เราสามารถเขียนการคอมพลีเมนต์ของเซตลงในแผนภาพได้ดังนี้

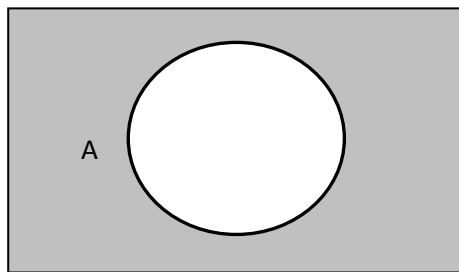


รูปแบบที่ 2 $A' = \{x \mid x \text{ เป็นสมาชิกของ } U \text{ แต่ } x \text{ ไม่เป็นสมาชิกของ } A\}$



****หมายเหตุ**

ในหนังสือบางเล่มอาจใช้สัญลักษณ์อื่นแทน A' เช่น $\bar{A}$, A^c , $\tilde{A}$, $C(A)$ เป็นต้น

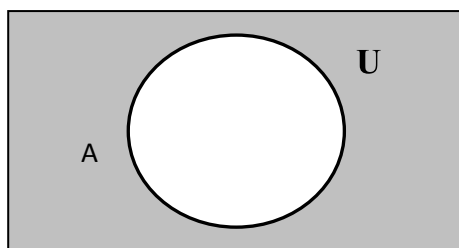


บริเวณที่แรเงาในแผนภาพนี้คือ A'

ตัวอย่าง ให้ $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $A = \{0, 2\}$ จงหา A' พร้อมเขียนแผนภาพ

วิธีทำ จะได้ A เป็นเซตที่มีสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของ U แต่ไม่ใช่สมาชิกของ A ดังนี้

$$A' = \{1, 3, 4, 5\}$$



A'

ตัวอย่าง ให้ $U = \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $B = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนคู่บวก}\}$ จงหา B'

วิธีทำ เขียน B ในรูปการแจกแจงจะได้ $B = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$

จะได้ B' เป็นเซตที่มีสมาชิกเป็นสมาชิกของ U แต่ไม่ใช่สมาชิกของ B

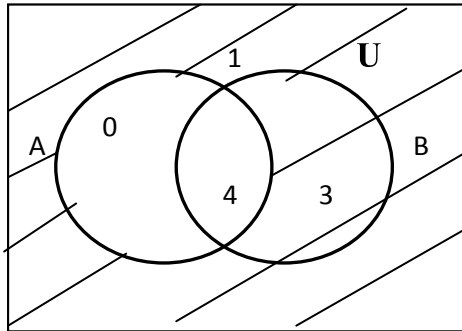
$$B' = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \text{ หรือ } B' = \{x \in U \mid x \text{ เป็นจำนวนคี่}\}$$

$$\text{หรือ } B' = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ เป็นจำนวนคี่}\}$$

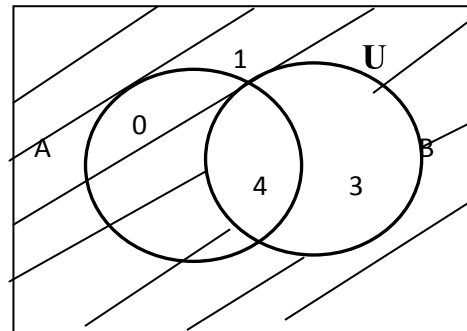
ตัวอย่าง ให้ $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{0, 2, 4\}$ และ $B = \{3, 4\}$

จงหา A' และ B' พร้อมเขียนแผนภาพ

วิธีทำ $A' = \{1, 3\}$ และ $B' = \{0, 1, 2\}$



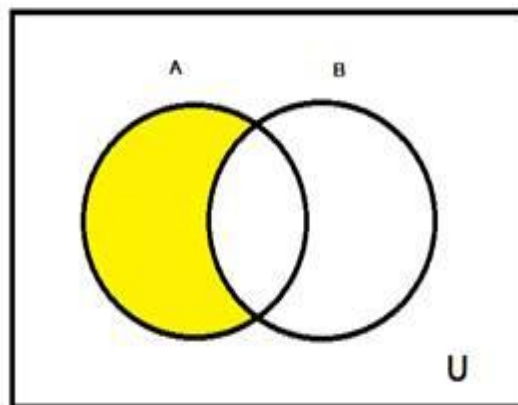
A'



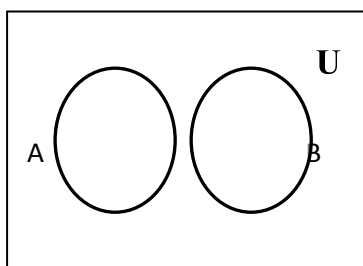
B'

4.8.4 การหาผลต่าง

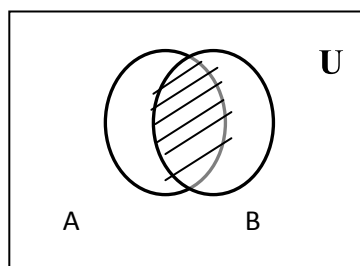
$A - B = \{x \mid x \text{ เป็นสมาชิกของ } A \text{ แต่ไม่เป็นสมาชิกของ } B\}$



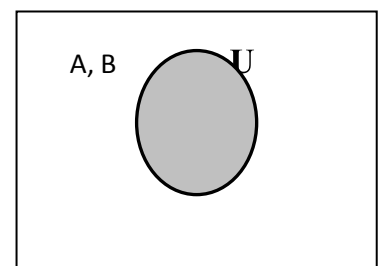
ส่วนที่แรเงาต่อไปนี้เป็นส่วนที่เป็นผลต่างของ A กับ B ซึ่งเขียนในรูป $A - B$



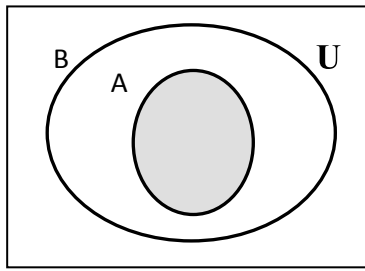
กรณีที่ 1



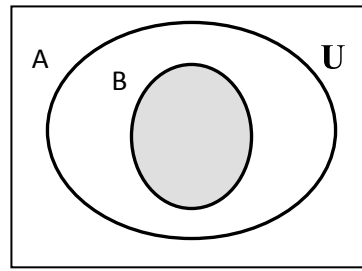
กรณีที่ 2



กรณีที่ 3



กรณีที่ 4



กรณีที่ 5

ในการแก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับคอมพลีเมนต์และผลต่างนั้น ถ้าใช้วิธีการเขียนแผนภาพจะเป็นปัญหาที่ยุ่งยากมาก วิธีการที่สะดวกที่สุด คือต้องใช้สมบัติต่าง ๆ เข้ามาช่วยในการแก้ปัญหาซึ่งมีสมบัติที่สำคัญ ดังนี้
สมบัติที่สำคัญบางประการเกี่ยวกับคอมพลีเมนต์ของเซต

1. $(A')' = A$
2. $\phi' = U$
3. $U' = \phi$
4. $A \cap A' = \phi$
5. $A \cup A = U$
6. $A \subset B \leftrightarrow B' \subset A'$
7. $A \cap B = \phi \leftrightarrow A \subset B'$

กฎของเดอมอร์แกน (DeMorgan s Law)

8. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
9. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ข้อควรรู้¹⁶

1. $\emptyset' = U$
2. $U' = \emptyset$
3. $A - \emptyset = A$
4. $\emptyset - A = A$

การพิสูจน์การเท่ากันของเซต

ทำได้ 2 วิธี

1. ใช้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์
2. ใช้สมบัติการดำเนินการบนเซต

¹⁶ <http://vichakarn.triamudom.ac.th/comtech/studentproject/final54/824/Infinite%20Stratos/MATH/Set.html> , ผู้จัดทำ 1. นายวรัญญู โตเรืองอินทรา เลขที่ 41 2. นายจิรวัฒน์ แก้วเกิดมณี เลขที่ 263.

นายณัฐนันท์ เลาหวงศ์วัฒนา เลขที่ 274. นายวรท บุญประสพ เลขที่ 40 5. นายวิชชากร รุ่งเรืองรัตนโชติ เลขที่ 43, 22 เมษายน 2558.

สมบัติการดำเนินการบนเซต

สมบัติพื้นฐาน

1. $A \cup \emptyset = A$, $A \cup U = U$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap U = A$
3. $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup C) \cup B$
4. $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap C) \cap B$
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
7. $(A')' = A$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$
8. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
9. $A - B = A \cap B'$

เพิ่มเติม

เมื่อ $A \subset B$ แล้ว

1. $A - B = \emptyset$
2. $A \cap B = A$
3. $A \cup B = B$

การหาจำนวนเซตแบบประยุกต์

- 1) กำหนด $n(A) = n$, $n(B) = m$ โดยที่ $A \subset B$
จำนวนเซต X ซึ่ง $A \subset X \subset B = 2 n(B) - n(A) = 2 m - n$ เซต
- 2) กำหนด $n(A) = n$, $n(B) = m$ โดยที่ $A \subset B$
จำนวนเซต X ซึ่ง $A \not\subset X$ แต่ $X \subset B = 2 n(B) - 2 n(A) = 2 m - 2 n$ เซต

การหาจำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

- 1) 2 เซต
 - $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 - $n[(A - B) \cup (B - A)] = n(A) + n(B) - 2[n(A \cap B)]$
- 2) 3 เซต
 - $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

คำถามท้ายบท

1. ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่างแต่ละข้อต่อไปนี้ให้ถูกต้องสมบูรณ์

1.1 จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

- 1.1.1 เซตของจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 5 ลงตัว
- 1.1.2 เซตของจังหวัดในประเทศไทยที่ขึ้นต้นด้วยพยัญชนะ “จ”
- 1.1.3 เซตของจำนวนเต็มบวกที่อยู่ระหว่าง 10 และ 16
- 1.1.4 เซตของจำนวนคู่บวกที่น้อยกว่า 14
- 1.1.5 เซตของจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 2 แต่น้อยกว่า 10

1.2 จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก

- 2.2.1 $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$
- 2.2.2 $B = \{1, 3, 5, \dots, 99\}$

2.2.3 $C = \{a, e, i, o, u\}$

2.2.4 $D = \{\text{มกราคม, กุมภาพันธ์, มีนาคม, ... , ธันวาคม}\}$

2.2.5 $E = \{\text{ชาย, หญิง}\}$

2. คำชี้แจง : จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว แล้วทำเครื่องหมาย (X) ลงใน¹⁷

1. กำหนดให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก ที่เป็นจำนวนคู่และเป็นจำนวนเฉพาะ ตรงกับเซตในข้อใด $A = \emptyset$ $A = \{2\}$ $A = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$	3. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ ตรงกับเซตในข้อใด ก. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$ ข. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนคู่บวก}\}$ ค. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนนับ}\}$ ง. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนนับสามตัวแรก}\}$
2. กำหนดให้ $A = \{x \mid x \text{ เป็นพยัญชนะในคำว่า "คณิตศาสตร์พื้นฐาน"}\}$ ตรงกับเซตในข้อใด $A = \{\text{ค, ณ, ต, ส, ต, พ, น, ส}\}$ $A = \{\text{ค, ณ, ต, ส, ร, พ, น, ส}\}$ $A = \{\text{ค, ณ, ต, ส, ร, พ, น, ส, น}\}$ $A = \{\text{ค, ณ, ต, ศ, ส, ร, พ, น, ส}\}$	4. กำหนดให้ $A = \{x \mid x \text{ เป็นสระในภาษาอังกฤษ}\}$ ตรงกับเซตในข้อใด $A = \{a, e, i, o, u\}$ $A = \{a, E, I, O, u\}$ $A = \{A, E, I, O, U\}$ $A = \{A, B, C, D, E\}$
5. กำหนดให้ $A = \{0, \pm 6, \pm 12, \pm 18, \dots\}$ ตรงกับเซตในข้อใด ก. $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มและหารด้วย 4 ลงตัว}\}$ ข. $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มและหารด้วย 5 ลงตัว}\}$ ค. $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มและหารด้วย 6 ลงตัว}\}$ ง. $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มและหารด้วย 7 ลงตัว}\}$	

¹⁷ กนกวลี อุษณกรกุลและรณชัย มาเจริญทรัพย์.แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เพิ่มเติม ม.4 เล่ม 1. กรุงเทพฯ : เดอะบุคส์, 2548. /กระทรวงศึกษาธิการ. หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ: ชุมชนุม การเกษตรแห่งประเทศไทย, 2551./กรมวิชาการ. คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: องค์การ รับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์, 2544./ แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ โครงการพัฒนาการเรียนการสอนที่ เน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลาง ปี 2541. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2542. / สาระและมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มสาระการ เรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์, 2545. / หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 สาระและมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์, 2551. จำรัส อินสม. คู่มือคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1. กรุงเทพฯ : แม็ค, 2547. จีระ เจริญสุขวิมลและวินิจ วงศ์รัตน์. สรุปสูตรหลัก&สูตร คณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 1-2. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด,ม.ป.ป. ธนวัฒน์ (สันติ) สุนท ราชพรพล. คู่มือสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน-เพิ่มเติม (ม.4-5-6) เล่ม 1-6. กรุงเทพฯ : SCIENCE CENTER,ม.ป.ป. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. คู่มือครูสาระการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2548.สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และ เทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4. กรุงเทพฯ :โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2548.สมัย เหล่าวานิชย์และพัชรพรณ เหล่าวานิชย์. คณิตศาสตร์ ม.4 ค 011. กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิงจำกัด,ม.ป.ป.

6. สัญลักษณในข้อใดใช้เขียนแทนเซต

- ก. () ข. { }
- ค. [] ง. ...

7. ในการเขียนสมาชิกของเซตแต่ละตัวจะกันด้วยเครื่องหมายในข้อใด

- ก. , ข. ()
- ค. ; ง |

8. “€” เป็นสัญลักษณ์แทนอะไรของเซต

- | | | | |
|----|--------------|----|--------------|
| ก. | ชื่อเขต | ข. | สมาชิกของเขต |
| ค. | ประเภทของเขต | ง. | ลักษณะของเขต |

9. เขตในข้อใดมีสมาชิก 4 ตัว

- ก. เซตของตัวอักษรในคำว่า “ น่ารัก ”
ข. เซตของตัวอักษรในคำว่า “ พรรณ ”
ค. เซตของตัวอักษรในคำว่า “ บอบบาง ”
ง. เซตของตัวอักษรในคำว่า “ เทศกาล ”

10. สมาชิกของเซตในข้อใดเท่ากับ $2, 3, 5, 7$

- เซตของจำนวนคี่บวก
- เซตของจำนวนนับตั้งแต่ 2 ขึ้นไป
- เซตของจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1
- เซตของจำนวนเฉพาะระหว่าง 0 ถึง 9

11. จำนวนในข้อใดไม่เป็นสมาชิกของเซตของตัวประกอบของ 20

- ဂ. ၂ ဃ. ၄
ဇ. ၅ ဎ. ၁၂

12. ± 1 เป็นสมาชิกของเซตในข้อใด

- ก. เซตของกำลังสองของ 1
ข. เซตของจำนวนนับที่ไม่เท่ากับ 0
ค. เซตของจำนวนเต็มที่ยกกำลังสองแล้วได้ 1
ง. เซตของจำนวนเต็มที่ไม่เท่ากับ 1 หรือ -1

13. ให้ A เป็นเซตของตัวอักษรในคำว่า “SEVEN” เขียนเซต A

แบบแจกแจงสมาชิกได้ดังข้อใด

- | | | | |
|----|-------------------|----|-----------------------|
| ဂ. | { SEVEN } | ဃ. | { S E V N } |
| င. | { S , E , V , N } | စ. | { S , E , V , E , N } |

14. ข้อใดไม่ใช่การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก

- ก. $\{1, 2, 3\}$ ข. $\{2, 4, 6, \dots\}$
 ค. $\{a, b, c, \dots, z\}$ ง. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \}$

15. ให้ $B = \{ x \mid x \text{ เป็นสระในภาษาอังกฤษ} \}$ เป็นการเขียนเซตแบบใด

- | | |
|-----------------------|----------------------------|
| ก. แบบแจกแจงสมาชิก | ข. แบบบรรยายลักษณะ |
| ค. แบบไม่แจกแจงสมาชิก | ง. แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก |

16. ให้ $A = \{1, 3, 5, 7\}$ เซตในข้อใดหมายถึงเซต A

- ก. $A = \{ x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \}$
 ข. $A = \{ x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่} \}$
 ค. $A = \{ x \mid x \text{ เป็นจำนวนคี่ตั้งแต่ } 1 \text{ ถึง } 7 \}$
 ง. $A = \{ x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่น้อยกว่า } 7 \}$

17. ให้ $S = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } -3 < x \leq 0\}$ เขียนเซต S แบบแจกแจงสมาชิกได้ดังข้อใด

- $$\begin{aligned} \text{ဂ.} \quad S &= \{-3, 0\} \\ \text{ဃ.} \quad S &= \{-2, -1\} \\ \text{င.} \quad S &= \{-2, -1, 0\} \\ \text{စ.} \quad S &= \{-3, -2, -1, 0\} \end{aligned}$$

18. ให้ $R = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ เขียนเซต R แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกได้ดังข้อใด

- $$\begin{aligned} \text{п.} \quad R &= \{x \mid x \in I\} \\ \text{у.} \quad R &= \{x \mid x \in I^+\} \\ \text{р.} \quad R &= \{x \mid x \in I^-\} \\ \text{я.} \quad R &= \{x \mid x = 1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

19. ให้ $H = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนคู่ระหว่าง } 1 \text{ ถึง } 10\}$ เซตในข้อใด หมายถึงเซต H

- ဂ. $\{2, 4, 6, 8\}$

ข. $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

ค. $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$

ง. $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$

20. กำหนดให้ $D = \{\dots, -2, 0, 2, \dots\}$ เขียนเซต D แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก ได้ดังข้อใด

ก. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

ข. $\{x \mid x \in I \text{ และ } -2 < x < 2\}$

ค. $\{x \mid x = 2n \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

ง. $\{x \mid x = 2n \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนจริง}\}$

21. ถ้า $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนนับที่ 3 หารได้ลงตัว}\}$ เขียนเซต A แบบแจกแจงสมาชิก ได้ดังข้อใด

ก. $\{3, 6, 9\}$

ข. $\{6, 9, 12\}$

ค. $\{3, 6, 9, \dots\}$

ง. $\{6, 9, 12, \dots\}$

22. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 12, 34\}$ เซต A มีสมาชิกกี่ตัว

ก. 8

ข. 6

ค. 4

ง. 2

23. ให้ $P = \{2, 4, 6, \dots, 16\}$ ข้อใดเป็นสมาชิกทั้งหมดของ P

ก. 2, 4, 6, 16

ข. 8, 10, 12, 14

ค. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16

ง. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

24. ถ้าให้ $Q = \{a, b, c\}$ ข้อใดผิด

ก. $A \in a$

ข. $b \in A$

ค. $d \notin A$

ง. Q มีสมาชิก 3 ตัว

25. กำหนดให้ $8 \notin B$ เซตในข้อใดสอดคล้องกับที่กำหนดให้

ก. $B = \{8\}$

ข. $B = \{8, 9, 10\}$

ค. $B = \{x \mid x < 8\}$

ง. $B = \{x \mid 6 < x < 10\}$

26. ข้อใดไม่เป็นเซต

ก. ชื่อของวันในหนึ่งสัปดาห์

ข. นักเรียนในห้องนี้ที่มีชื่อขึ้นต้นด้วย "ว"

ค. จำนวนเฉพาะตั้งแต่ 0 ถึง 100

ง. นักเรียนที่มีอายุเกิน 16 ปี

27. ข้อใดเป็นสมาชิกของ "เซตของจำนวนเต็มบวกที่สอดคล้องกับสมการ $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$ "

ก. 1

ข. 2

ค. 3

ง. 4

28. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ข้อใดไม่ถูกต้อง

ก. เซต A มีสมาชิกทั้งหมด 4 ตัว

ข. เป็นการเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก

ค. เป็นการเขียนสมาชิกทุกตัวลงในเซต

ง. เป็นการเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก

29. ข้อใดเป็นจริง

ก. เซตของพยัญชนะในคำว่า "เซตจำกัด" มีจำนวนสมาชิก 6 ตัว

ข. เซตของพยัญชนะในคำว่า "เซตอนันต์" มีจำนวนสมาชิก 4 ตัว

ค. เซตของพยัญชนะในคำว่า "คณิตศาสตร์" มีจำนวนสมาชิก 5 ตัว

ง. เซตของพยัญชนะในคำว่า "จำนวนเต็มบวก" มีจำนวนสมาชิก 9 ตัว

30. กำหนดให้ B เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกที่หาร 100 ลงตัว จะเขียน B ในแบบแจกแจงสมาชิกได้อย่างไร

ก. $B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$

ข. $B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 150\}$

ค. $B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 150, 200\}$

ง. $B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 300, 400\}$

31. กำหนดให้ $A = \{-5, -10, -15, -20, \dots\}$ จะเขียน A แบบบอกเงื่อนไขได้อย่างไร

ก. $A = \{x \in \mathbb{I}^+ \mid x \text{ หารด้วย } 5 \text{ ลงตัว}\}$

ข. $A = \{x \in \mathbb{I}^- \mid x \text{ หารด้วย } 5 \text{ ลงตัว}\}$

ค. $A = \{x \in \mathbb{I}^+ \mid x \text{ หารด้วย } 10 \text{ ลงตัว}\}$

ง. $A = \{x \in \mathbb{I}^- \mid x \text{ หารด้วย } 10 \text{ ลงตัว}\}$

32. กำหนดให้ $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก และ } x \geq 5\}$ ข้อใดเขียนเซตได้ถูกต้อง

ก. $A = \{6, 7, 8, 9, \dots\}$

ข. $A = \{-5, -6, -7, -8, \dots\}$

ค. $A = \{5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$

ง. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

33. กำหนดให้ $A = \{\emptyset, a, \{a\}, b, \{a, b\}, \{a, \{b\}\}\}$ ข้อใดกล่าวถูกต้อง

ก. $\emptyset \in A$

ข. $\{a, b, c\} \in A$

ค. $\{a, b\} \notin A$

ง. $\{a\}, b, c \in A$

34. 2, 3, 5, 7 เป็นสมาชิกของเซตใดต่อไปนี้

ก. เซตของจำนวนคี่บวก

ข. เซตของจำนวนนับตั้งแต่ 2 ขึ้นไป

ค. เซตของจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1

ง. เซตของจำนวนเฉพาะระหว่าง 0 และ 9

35. ข้อใดต่อไปนี้ไม่เป็นสมาชิกของเซตของจุดบนเส้นตรง $y = 3x - 1$

ก. (0, -1)

ข. (1, 2)

ค. (2, 1)

ง. (3, 8)

3. คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อที่ถูก และเขียนเครื่องหมาย ✕ หน้าข้อที่ผิด

ตัวอย่าง ✕ 0. ถ้า X เป็นเซตของจำนวนที่มากกว่า 3 แล้ว ดังนั้นจะได้ว่า $-3 \in X$

..... 00. ถ้า Y เป็นเซตของจำนวนเฉพาะ แล้ว ดังนั้นจะได้ว่า $2 \in Y$

- 1. ถ้า A เป็นเซตของตัวอักษร 3 ตัวแรกในภาษาอังกฤษ แล้ว ดังนั้นจะได้ว่า $a \in A$
- 2. ถ้า B เป็นเซตของตัวอักษร 3 ตัวสุดท้ายในภาษาอังกฤษ แล้ว ดังนั้นจะได้ว่า $x \notin B$
- 3. ถ้า C เป็นเซตของจำนวนเต็ม แล้ว ดังนั้นจะได้ว่า $0 \in C$
- 4. ถ้า D เป็นเซตของจำนวนคี่ แล้ว ดังนั้นจะได้ว่า $7 \notin D$
- 5. ถ้า E เป็นเซตของจำนวนคู่ แล้ว ดังนั้นจะได้ว่า $-4 \in E$
- 6. ถ้า F เป็นเซตของสระในภาษาอังกฤษ แล้ว ดังนั้นจะได้ว่า $a \notin C$
- 7. ถ้า G เป็นเซตของจำนวนคี่ แล้ว ดังนั้นจะได้ว่า $5 \in G$
- 8. ถ้า H เป็นเซตของสีของธงชาติไทย แล้ว ดังนั้นจะได้ว่า สีแดง $\in H$
- 9. ถ้า I เป็นเซตของจำนวนตรรกยะแล้ว ดังนั้นจะได้ว่า $\sqrt{3} \in I$
- 10. ถ้า J เป็นเซตของประเทศในทวีปเอเชีย แล้ว ดังนั้นจะได้ว่า ประเทศอังกฤษ $\notin J$
- 11. ถ้า K เป็นเซตของผลไม้ไทย แล้ว ดังนั้นจะได้ว่า มะม่วง $\in K$
- 12. ถ้า L เป็นเซตของจังหวัดที่เคยเป็นเมืองหลวงของประเทศไทย แล้วดังนั้นจะได้ว่า ฉะเชิงเทรา $\notin L$
- 13. ถ้า M เป็นเซตของสระในคำว่า "BOY" แล้ว ดังนั้นจะได้ว่า B $\in M$
- 14. ถ้า N เป็นเซตของสัตว์ปีก แล้ว ดังนั้นจะได้ว่า ปลา $\notin N$
- 15. ถ้า O เป็นเซตของสัตว์ป่า แล้ว ดังนั้นจะได้ว่า แมว $\in O$

ให้นักเรียนพิจารณาว่าข้อความในแต่ละข้อเป็นจริงหรือเท็จ

ตัวอย่าง **จริง** เซตของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 5 มีสมาชิก 4 ตัว

..... **เท็จ** -2 เป็นสมาชิกของเซตของจำนวนนับ

- 1. เซตของตัวเลขโดดมีสมาชิก 10 ตัว
- 2. 0 เป็นสมาชิกของเซตของจำนวนเต็มบวก
- 3. ฉะเชิงเทราเป็นสมาชิกของเซตของจังหวัดในภาคตะวันออกของประเทศไทย
- 4. เซตของวันในหนึ่งสัปดาห์มีสมาชิก 7 ตัว
- 5. มกราคมเป็นสมาชิกของเซตของเดือนที่มี 30 วัน
- 6. เซตของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 1 กับ 2 เป็นเซตที่ไม่มีสมาชิก
- 7. เซตของจำนวนเต็ม มีสมาชิก 10 ตัว
- 8. เซตของสีของรุ้งกินน้ำมีสมาชิก 5 ตัว
- 9. ประเทศไทยเป็นสมาชิกของเซตของประเทศในทวีปเอเชีย
- 10. นายชวน หลีกภัย เป็นสมาชิกของเซตของนายกรัฐมนตรีของประเทศไทย
- 11. $\sqrt{2}$ เป็นสมาชิกของเซตของจำนวนเต็มบวก
- 12. -5 เป็นสมาชิกของเซตของจำนวนเต็ม
- 13. ยะลาเป็นสมาชิกของเซตของจังหวัดในภาคกลางของประเทศไทย

- 14. ประเทศลาวเป็นสมาชิกของเขตของประเทศที่มีพรมแดนติดกับประเทศไทย
..... 15. ปลาวาฬเป็นสมาชิกของเขตของสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม

จากเขตที่กำหนดไว้ในแต่ละข้อ ให้นักเรียนเติมสัญลักษณ์ $\in$ หรือ $\notin$ เพื่อให้ประโยคเป็นจริง

ตัวอย่าง กำหนดให้ M เป็นเซตของสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม
แมว $\in$ M หรือ นก $\notin$ M

กำหนดให้ A เป็นเซตของจำนวนนับที่น้อยกว่า 10
 B เป็นเซตของจำนวนเต็มลบ
 C เป็นเซตของจำนวนเต็มระหว่าง 9 กับ 15

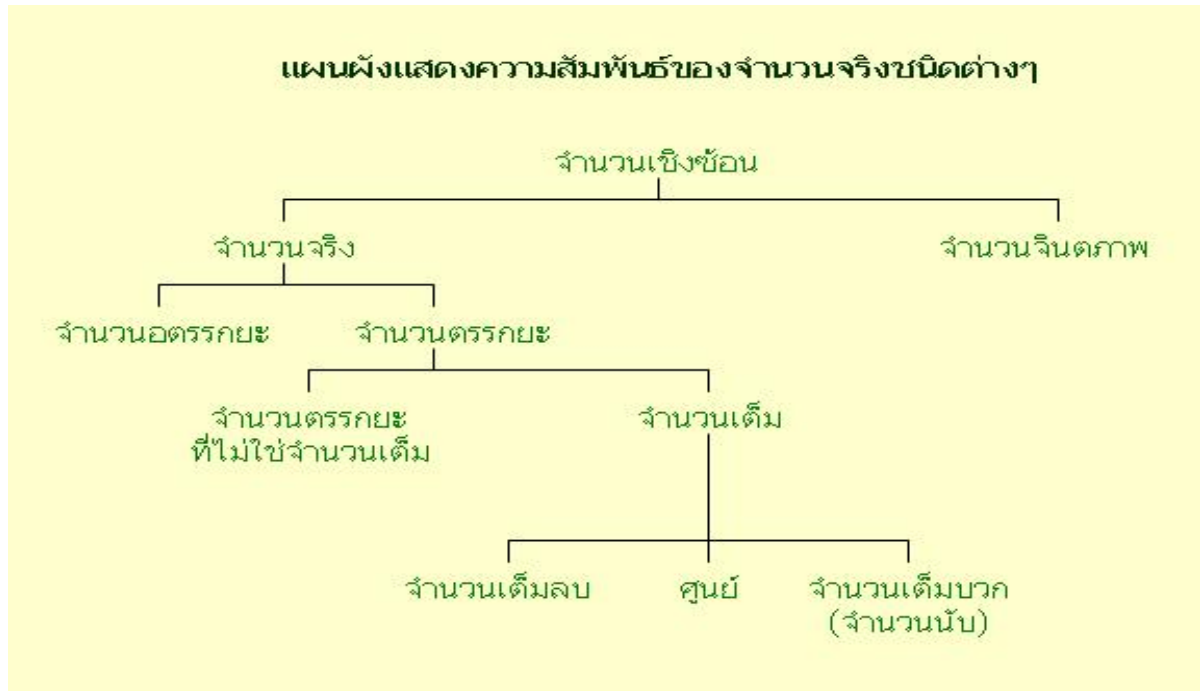
1. 10 A
2. 10 C
3. 9 B
4. 12 C
5. 0 A
6. -1 C
7. 15 C
8. -3 B
9. -10 A
10. -10 B
11. 11 A
12. 11 C
13. 1 B
14. 6 A
15. 14 C

ไม่อยากใช้มั๊ยครับ



บทที่ 5
ระบบจำนวนจริง¹⁸

ระบบจำนวนจริง



5.1 • ระบบจำนวนจริง

จากแผนผังแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนข้างต้น จะพบว่า ระบบจำนวนจริง จะประกอบไปด้วย

1. จำนวนอตรรกยะ หมายถึง จำนวนที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็ม หรือทศนิยมซ้ำได้ ตัวอย่างเช่น $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$ หรือ π ซึ่งมีค่า 3.14159265... หรือ อีกมุมมองคือ เซตของจำนวนอตรรกยะ : จำนวนที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ ซึ่งไม่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มที่ตัวส่วนไม่เป็นศูนย์ แต่สามารถเขียนได้ในรูปทศนิยมไม่ซ้ำ และสามารถกำหนดค่าโดยประมาณได้

ตัวอย่างจำนวนอตรรกยะ

1.4142135...	มีค่าประมาณ	1.414
1.4422495...	มีค่าประมาณ	1.442
-0.8660254...	มีค่าประมาณ	-0.866
3.14159265...	มีค่าประมาณ	3.1416

¹⁸ <http://vichakarn.triamudom.ac.th/comtech/studentproject/final54/824/Infinite%20Stratos/MATH/Set.html> , ผู้จัดทำ

นางสาวพรปรียา ล้อกาญจนรัตน์ เลขที่ 7 2.นางสาวสิริกร ดอกเทียน เลขที่ 13
3.นางสาวสุภาณี เตชะมนตรีกุล เลขที่ 16 4.นางสาวสุกัญญา เตชะมนตรีกุล เลขที่18 5.นางสาวอาทิมา เอื้อไพบูลรัตน์ เลขที่ 21

2. จำนวนตรรกยะ หมายถึง จำนวนที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มหรือทศนิยมซ้ำได้ โดยที่ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$

ตัวอย่างเช่น

$$\frac{1}{2} \text{ เขียนแทนด้วย } 0.5000\dots$$

$$\frac{4}{2} \text{ เขียนแทนด้วย } 0.2000\dots$$

$$\frac{1}{7} \text{ เขียนแทนด้วย } 0.\overline{142857}$$

$$\frac{1}{3} \text{ เขียนแทนด้วย } 0.3333\dots = 0.\overline{3}$$

NOTE

จำนวนต่อไปนี้ เป็น จำนวนตรรกยะ

1. จำนวนเต็ม ได้แก่ $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$

2. จำนวนที่เขียนในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มและตัวส่วนไม่เป็นศูนย์

$$\frac{1}{2}$$

3. จำนวนที่เขียนในรูปทศนิยมซ้ำ เช่น $1.414, -0.17, 1.508$

5.2 • ระบบจำนวนตรรกยะ

จำนวนตรรกยะยังสามารถแบ่งเป็น 2 ประเภท คือ

1. จำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม หมายถึง จำนวนที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มหรือทศนิยมซ้ำได้ แต่ไม่เป็นจำนวนเต็ม

2. จำนวนเต็ม หมายถึง จำนวนที่เป็นสมาชิกของเซต $I = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ เมื่อกำหนดให้ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม

5.3 • ระบบจำนวนเต็ม

จำนวนเต็มยังสามารถแบ่งได้อีกเป็น 3 ประเภทด้วยกัน



1. จำนวนเต็มลบ หมายถึง จำนวนที่เป็นสมาชิกของเซต I^- โดยที่ $I^- = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$
เมื่อ I^- เป็นเซตของจำนวนเต็มลบ
2. จำนวนเต็มศูนย์ (0)
3. จำนวนเต็มบวก หมายถึง จำนวนที่เป็นสมาชิกของเซต I^+ โดยที่ $I^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ เมื่อ I^+ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มบวก เรียกได้อีกอย่างว่า "จำนวนนับ" ซึ่งเขียนแทนเซตของจำนวนนับได้ด้วยสัญลักษณ์ N โดยที่ $N = I^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

5.4 • ระบบจำนวนเชิงซ้อน

นอกจากระบบจำนวนจริงที่กล่าวมาข้างต้นแล้ว ยังมีจำนวนอีกประเภทหนึ่ง ซึ่งได้จากการแก้สมการต่อไปนี้

$$x^2 = -1 \quad \therefore x = \sqrt{-1} = i$$

$$x^2 = -2 \quad \therefore x = \sqrt{-2} = \sqrt{2} i$$

$$x^2 = -3 \quad \therefore x = \sqrt{-3} = \sqrt{3} i$$

จะเห็นได้ว่า “ไม่สามารถจะหาจำนวนจริงใดที่ยกกำลังสองแล้วมีค่าเป็นลบ” เราเรียก $\sqrt{-1}$ หรือจำนวนอื่นๆ ในลักษณะนี้ว่า “จำนวนจินตภาพ” และเรียก i ว่า “หนึ่งหน่วยจินตภาพ” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ i ยูเนียนของเซตจำนวนจริงกับเซตจำนวนจินตภาพ คือ “เซตจำนวนเชิงซ้อน” (Complex numbers)

***NOTE

ยูเนียนของเซตของจำนวนตรรกยะและเซตของจำนวนอตรรกยะเรียกว่า “เซตของจำนวนจริง” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ R จำนวนอีกประเภทหนึ่งที่ได้จากการแก้สมการ $x = -1$ ซึ่งบอกไม่ได้ว่ามากกว่าศูนย์หรือน้อยกว่าศูนย์ จำนวนพวกนี้ไม่ใช่จำนวนจริง ยูเนียนของเซตของจำนวนและเซตจำนวนจริงชนิดใหม่เรียกว่า “เซตจำนวนเชิงซ้อน”

สมบัติของจำนวนจริง

1. สมบัติของการเท่ากันในระบบจำนวนจริง

เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ

(1) สมบัติการสะท้อน $a = a$

(2) สมบัติการสมมาตร ถ้า $a = a$ แล้ว $b = c$

(3) สมบัติการถ่ายทอด ถ้า $a = a$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$

(4) สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a = b$ แล้ว $a+c = b+c$

(5) สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$

2. สมบัติการบวกในระบบจำนวนจริง

เมื่อกำหนด a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ

(1). สมบัติปิดการบวก $a + b$ เป็นจำนวนจริง

(2). สมบัติการสลับที่ของการบวก $a + b = b + a$

(3). สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการบวก $a + (b + c) = (a + b) + c$

(4). เอกลักษณ์การบวก $0 + a = a = a + 0$

นั่นคือ ในระบบจำนวนจริงจะมี 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก

(5). อินเวอร์สการบวก $a + (-a) = 0 = (-a) + a$

นั่นคือ ในระบบจำนวนจริง จำนวน a จะมี $-a$ เป็นอินเวอร์สของการบวก

3. สมบัติการคูณจำนวนจริง

เมื่อกำหนด a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ

(1). สมบัติปิดการคูณ ab เป็นจำนวนจริง

(2). สมบัติการสลับที่ของการคูณ $ab = ba$

(3). สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการคูณ $a(bc) = (ab)c$

(4). เอกลักษณ์การคูณ $1 \cdot a = a = a \cdot 1$

นั่นคือในระบบจำนวนจริง มี 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ

5. อินเวอร์สการคูณ $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a, a \neq 0$

นั่นคือ ในระบบจำนวนจริง จำนวนจริง a จะมี a^{-1} เป็นอินเวอร์สการคูณ ยกเว้น 0

6. สมบัติการแจกแจง $a(b + c) = ab + ac$ $(b + c)a = ba + ca$

สรุปเป็นตารางดังนี้

สมบัติ	การบวก	การคูณ
ปิด	$a+b \in \mathbb{R}$	$ab \in \mathbb{R}$
การสลับที่	$a+b = b+a$	$ab = ba$
การเปลี่ยนหมู่	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(ab) = a(bc)$
การมีเอกลักษณ์	มีจำนวนจริง 0 ซึ่ง $0+a = a = a+0$	มีจำนวนจริง 1 $a = a \cdot 1$ ซึ่ง 1 ซึ่ง
	เรียก 0 ว่าเอกลักษณ์	เรียก 1 ว่าเอกลักษณ์
การมีอินเวอร์ส	สำหรับจำนวนจริง a จะมีจำนวนจริง $-a$ โดยที่ $(-a)+a = 0 = a+(-a)$ เรียก $-a$ ว่าอินเวอร์ส การบวกจำนวนจริงของ a	เรียก 1 ว่าเอกลักษณ์การคูณสำหรับจำนวนจริง a ที่ $a \neq 0$ จะมีจำนวนจริง a^{-1} โดยที่ $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$ เรียก a^{-1} ว่าอินเวอร์สการคูณของจำนวนจริง a
การแจกแจง	$a(a+b) = ab+ac$	$a(b + c) = ab + ac$ $(b + c)a = ba + ca$

สมบัติของการไม่เท่ากัน

บทนิยาม $a < b$ หมายถึง a น้อยกว่า b
 $a > b$ หมายถึง a มากกว่า b

• สมบัติของการไม่เท่ากัน

กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. สมบัติการถ่ายทอด ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$
2. สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$
3. จำนวนจริงบวกและจำนวนจริงลบ
 a เป็นจำนวนจริงบวก ก็ต่อเมื่อ $a > 0$
 a เป็นจำนวนจริงลบ ก็ต่อเมื่อ $a < 0$
4. สมบัติการคูณด้วยจำนวนเท่ากันที่ไม่เท่ากับศูนย์
ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$
ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$
5. สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก ถ้า $a + c > b + c$ แล้ว $a > b$
6. สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ
ถ้า $ac > bc$ และ $c > 0$ แล้ว $a > b$
ถ้า $ac > bc$ และ $c < 0$ แล้ว $a < b$

บทนิยาม

$a \leq b$	หมายถึง a น้อยกว่าหรือเท่ากับ b
$a \geq b$	หมายถึง a มากกว่าหรือเท่ากับ b
$a < b < c$	หมายถึง $a < b$ และ $b < c$
$a \leq b \leq$	หมายถึง $a \leq b$ และ $b \leq c$

ช่วงของจำนวนจริง และการแก้อสมการ

• ช่วงของจำนวนจริง

กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ $a < b$

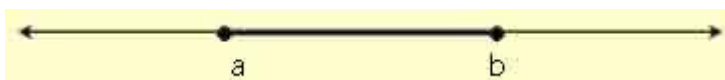
1. ช่วงเปิด (a, b)

$$(a, b) = \{ x \mid a < x < b \}$$



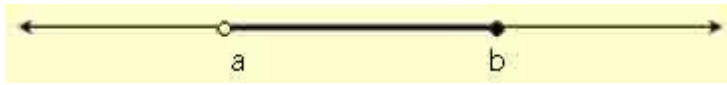
2. ช่วงปิด $[a, b]$

$$[a, b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$$



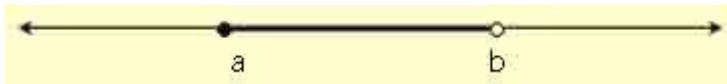
3. ช่วงครึ่งเปิด $(a, b]$

$$(a, b] = \{ x \mid a < x \leq b \}$$



4. ช่วงครึ่งเปิด $[a, b)$

$$[a, b) = \{ x \mid a \leq x < b \}$$



5. ช่วง (a, ∞)

$$(a, \infty) = \{ x \mid x > a \}$$



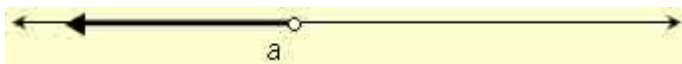
6. ช่วง $[a, \infty)$

$$[a, \infty) = \{ x \mid x \geq a \}$$



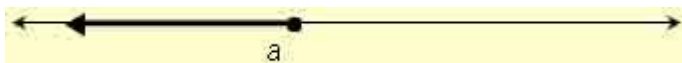
7. ช่วง $(-\infty, a)$

$$(-\infty, a) = \{ x \mid x < a \}$$



8. ช่วง $(-\infty, a]$

$$(-\infty, a] = \{ x \mid x \leq a \}$$



• การแก้อสมการ

อสมการ คือ ประโยคสัญลักษณ์ที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ของตัวแปร กับจำนวนใดๆ โดยใช้เครื่องหมาย $\neq, \leq, \geq, <, >$, เป็นตัวระบุความสัมพันธ์ของตัวแปร และจำนวนดังกล่าว

คำตอบของอสมการ คือ ค่าของตัวแปรที่ทำให้อสมการเป็นจริง

เซตคำตอบของอสมการ คือ เซตของค่าตัวแปรทั้งหมดที่ทำให้อสมการเป็นจริง

หลักในการแก้อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

เราอาศัยสมบัติของการไม่เท่ากันในการแก้อสมการ เช่น

1. สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน

$$\text{ถ้า } a > b \text{ แล้ว } a + c > b + c$$

2. สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน

ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$

ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาเซตคำตอบของ $x + 3 > 12$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} x + 3 &> 12 \\ \therefore x + 3 + (-3) &> 12 + (-3) \\ x &> 9 \\ \therefore \text{เซตคำตอบของอสมการนี้คือ } (9, \infty) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาเซตคำตอบของ $2x + 1 < 9$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} 2x + 1 &< 9 \\ \therefore 2x + 1 + (-1) &< 9 + (-1) \\ 2x &< 8 \\ \frac{1}{2}(2x) &< \frac{1}{2}(8) \\ x &< 4 \\ \therefore \text{เซตคำตอบของอสมการนี้คือ } (-\infty, 4) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาเซตคำตอบของ $4x - 5 \leq 2x + 5$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} 4x - 5 &\leq 2x + 5 \\ 4x - 5 + 5 &\leq 2x + 5 + 5 \\ 4x &\leq 2x + 10 \\ 4x - 2x &\leq 2x + 10 - 2x \\ 2x &\leq 10 \\ \frac{1}{2}(2x) &\leq \frac{1}{2}(10) \\ x &\leq 5 \\ \therefore \text{เซตคำตอบของอสมการนี้คือ } (-\infty, 5] \end{aligned}$$

หลักในการแก้สมการตัวแปรเดียวกำลังสอง

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ

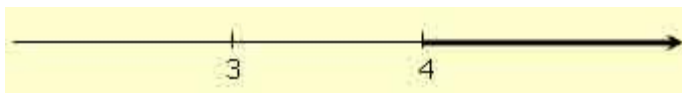
1. ถ้า $ab = 0$ แล้ว จะได้ $a = 0$ หรือ $b = 0$
2. ถ้า $\frac{a}{b} = 0$ แล้ว จะได้ $a = 0$
3. ถ้า $ab > 0$ แล้ว จะได้ $a > 0$ และ $b > 0$ หรือ $a < 0$ และ $b < 0$
4. ถ้า $ab < 0$ แล้ว จะได้ $a > 0$ และ $b < 0$ หรือ $a < 0$ และ $b > 0$
5. ถ้า $ab \geq 0$ แล้ว จะได้ $ab > 0$ หรือ $ab = 0$
6. ถ้า $ab \leq 0$ แล้ว จะได้ $ab < 0$ หรือ $ab = 0$
7. ถ้า $\frac{a}{b} > 0$ แล้ว จะได้ $a > 0$ และ $b > 0$ หรือ $a < 0$ และ $b < 0$
8. ถ้า $\frac{a}{b} < 0$ แล้ว จะได้ $a > 0$ และ $b < 0$ หรือ $a < 0$ และ $b > 0$
9. ถ้า $\frac{a}{b} \geq 0$ แล้ว $\frac{a}{b} > 0$ หรือ $\frac{a}{b} = 0$
จะได้
10. ถ้า $\frac{a}{b} \leq 0$ แล้ว $\frac{a}{b} < 0$ หรือ $\frac{a}{b} = 0$
จะได้

ตัวอย่างที่ จงหาเซตคำตอบของ $(x - 3)(x - 4) > 0$

วิธีทำ ถ้า $(x - 3)(x - 4) > 0$ แล้วจะได้

$$x - 3 > 0 \text{ และ } x - 4 > 0$$

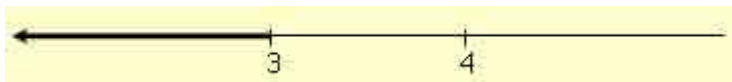
$$x > 3 \text{ และ } x > 4$$



$\therefore$ เมื่อ $x - 3 > 0$ และ $x - 4 < 0$ แล้วจะได้ $x > 4$

$$\text{หรือ } x - 3 < 0 \text{ และ } x - 4 < 0$$

$$x < 3 \text{ และ } x < 4$$



$\therefore$ $x - 3 < 0$ และ $x - 4 < 0$ แล้วจะได้ $x < 3$

นั่นคือ เซตคำตอบของ $(x - 3)(x - 4) > 0$ คือ

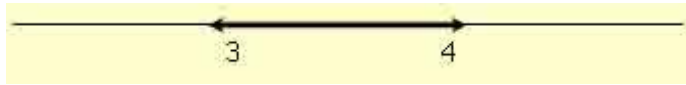
$$\{x \mid x < 3 \text{ หรือ } x > 4\} = (-\infty, 3) \cup (4, \infty)$$

ตัวอย่างที่ จงหาเซตคำตอบของ $(x - 3)(x - 4) < 0$

วิธีทำ ถ้า $(x - 3)(x - 4) < 0$ แล้วจะได้

$$x - 3 > 0 \text{ และ } x - 4 < 0$$

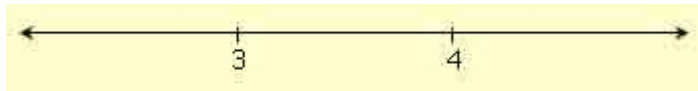
$$x > 3 \text{ และ } x < 4$$



∴ เมื่อ $x - 3 > 0$ และ $x - 4 < 0$ แล้วจะได้ $3 < x < 4$

หรือ $x - 3 < 0$ และ $x - 4 > 0$

$x < 3$ และ $x > 4$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้



∴ ไม่มีจำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับ $x - 3 < 0$ และ $x - 4 > 0$

นั่นคือ เซตคำตอบของ $(x - 3)(x - 4) < 0$ คือ

$$\{ x \mid 3 < x < 4 \} = (3, 4)$$

จากตัวอย่างที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น สรุปเป็นหลักในการแก้สมการได้ดังนี้

กำหนดให้ x, a, b เป็นจำนวนจริง และ $a < b$ แล้ว

1. ถ้า $(x - a)(x - b) > 0$ จะได้ $x < a$ หรือ $x > b$
2. ถ้า $(x - a)(x - b) < 0$ จะได้ $a < x < b$
3. ถ้า $(x - a)(x - b) \geq 0$ จะได้ $x \leq a$ หรือ $x \geq b$
4. ถ้า $(x - a)(x - b) \leq 0$ จะได้ $a \leq x \leq b$
5. ถ้า $\frac{x-a}{x-b} > 0$ จะได้ $x < a$ หรือ $x > b$
6. ถ้า $\frac{x-a}{x-b} < 0$ จะได้ $a < x < b$
7. ถ้า $\frac{x-a}{x-b} \geq 0$ จะได้ $x \leq a$ หรือ $x > b$
8. ถ้า $\frac{x-a}{x-b} \leq 0$ จะได้ $a \leq x < b$

ค่าสัมบูรณ์

บทนิยาม กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง

$$|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } a = 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$$

นั่นคือ ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงใดๆ ต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ

• สมบัติของค่าสัมบูรณ์

1. $|x| = |-x|$

2. $|xy| = |x||y|$

3. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

4. $|x - y| = |y - x|$

5. $|x|^2 = x^2$

6. $|x + y| \leq |x| + |y|$

7. เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก

$|x| < a$ หมายถึง $-a < x < a$

$|x| \leq a$ หมายถึง $-a \leq x \leq a$

8. เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก

$|x| > a$ หมายถึง $x < -a$ หรือ $x > a$

$|x| \geq a$ หมายถึง $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

คำถามท้ายบท¹⁹

1. ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. สำหรับทุกจำนวนจริง a และ b ถ้า $a < b$ แล้ว $a^2 < b^2$
2. สำหรับทุกจำนวนจริง a ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $0 < a^2 < a$
3. สำหรับทุกจำนวนจริง a , b และ c ถ้า $ab = ac$ แล้ว $b = c$
4. สำหรับทุกจำนวนจริง a , $\sqrt{a^2} = a$

เฉลย

1. เท็จ เช่น $a = -1$, $b = 0$ จะเห็นว่า $a < b$ แต่ $a^2 > b^2$ เพราะ $a^2 = (-1)^2 = 1$, $b^2 = 0$
2. จริง เนื่องจาก $0 < a < 1$ แสดงว่า a เป็นจำนวนจริงบวกพิจารณา $0 < a < 1$ จะได้ว่า $0 < a < a \cdot a < 1$. ดังนั้น $0 < a^2 < a$
3. เท็จ เช่น $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$
จะเห็นว่า $ab = 0 \cdot 1 = 0$
 $ac = 0 \cdot 2 = 0$
 $ab = ac$ แต่ $b \neq c$
4. เท็จ เช่น $a = -1$, $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-1)^2} = 1 \neq -1$

2. ถ้า $x - a$ หาร $x^3 + 2x^2 - 5x - 2$ เหลือเศษ 4 แล้ว ผลบวกของค่า a ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -6
2. -2
3. 2
4. 6

เฉลย

$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 2$ เศษที่ได้จากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - a$ คือ $P(a) = 4$
 จะได้ $P(a) = a^3 + 2a^2 - 5a - 2 = 4 \quad (a + 1)(a + 3)(a - 2) = 0$
 $a = -1, -3, 2$ ดังนั้นผลบวกของค่า a ทั้งหมด $= (-1) + (-3) + 2 = -2$

3. ถ้า a เป็นจำนวนจริง แล้วให้ $[a]$ คือจำนวนเต็มที่ยกที่สุดที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ a จงหาเซตคำตอบของสมการ $[1 - 2x] = 3$

1. เซตคำตอบของสมการคือ $(-\frac{3}{2}, -1]$
2. เซตคำตอบของสมการคือ $(-\frac{2}{3}, -1]$
3. เซตคำตอบของสมการคือ $(-\frac{3}{2}, 1]$
4. เซตคำตอบของสมการคือ $(-\frac{2}{3}, 1]$

เฉลย

แนวคิด เนื่องจาก $[a]$ คือจำนวนเต็มที่ยกที่สุดที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ a [2.8] คือจำนวนเต็มที่ยกที่สุดที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 2.8 ดังนั้น $[2.8] = 2$ จากตัวอย่างแสดงว่า $[1 - 2x] = 3$

ก็ต่อเมื่อ $3 \leq 1 - 2x < 4$

$$2 \leq -2x < 3$$

$$-2 \geq 2x > -3$$

$$-3 < 2x \leq -2$$

$$\text{ดังนั้น } -\frac{3}{2} < x \leq -1$$

$$\text{เซตคำตอบของสมการคือ } (-\frac{3}{2}, -1]$$

4. เซตคำตอบของสมการ $3 \leq |x + 1| \leq 7$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-10, 4)$
2. $(-9, -2) \cup (1, 7)$
3. $(-5, 8)$
4. $(-10, -3) \cup (3, 8)$

เฉลย

$$\text{แนวคิด } 3 \leq |x + 1| \leq 7$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } 3 \leq |x + 1| \quad \text{หรือ} \quad |x + 1| \leq 7$$

$$\text{พิจารณา } 3 \leq |x + 1|$$

ก็ต่อเมื่อ $3 \leq x + 1$ หรือ $x + 1 \leq -3$
 $x \geq 2$ หรือ $x \leq -4$ (1)

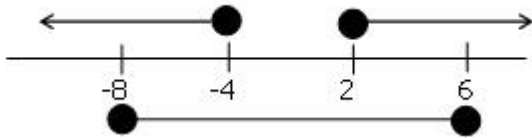
พิจารณา $|x + 1| \leq 7$

ก็ต่อเมื่อ $-7 \leq x + 1 \leq 7$

$-8 \leq x \leq 6$ (2)

นั่นคือ $3 \leq |x + 1| \leq 7$

ก็ต่อเมื่อ $x \geq 2$ หรือ $x \leq -4$ และ $-8 \leq x \leq 6$



$$\therefore x \in [-8, -4] \cup [2, 6] \subset (-9, -2) \cup (1, 7)$$

5. เซตคำตอบของอสมการ $\frac{7}{2-x} \leq 3$ คือเซตในข้อใด

1. $(-\infty, -\frac{1}{3}]$

2. $[-\frac{1}{3}, 2)$

3. $(-\infty, -\frac{1}{3}] \cup (2, \infty)$

4. ข้อ 1, 2, 3 ไม่มีข้อใดถูก

เฉลย

$$\frac{7}{2-x} \leq 3$$

$$\frac{7}{2-x} - 3 \leq 0$$

$$\frac{7-3(2-x)}{2-x} \leq 0$$

$$\frac{3x+1}{2-x} \leq 0$$

$$\frac{3x+1}{x-2} \geq 0 \quad \text{และ } x \neq 2$$

นำ $(x-2)^2$ คูณทั้งสองข้าง $(3x+1)(x-2) \geq 0$



ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการคือ $(-\infty, -\frac{1}{3}] \cup (2, \infty)$

6. ในระบบจำนวนจริง ข้อต่อไปนี้ ข้อใดถูก

1.1) $\frac{22}{7}$ = เป็นจำนวนอตรรกยะ

1.2) $-1.23242424\ldots$ เป็นจำนวนตรรกยะ

1.3) $1.12122122212222\ldots$ เป็นจำนวนตรรกยะ

ในหัวข้อ 1.4 – 1.15 ให้ a, b, c เป็นจำนวนตรรกยะ และ x, y, z เป็นจำนวนอตรรกยะ

1.4) $a + bc$ เป็นจำนวนตรรกยะ

1.5) $\frac{a}{b}$ เป็นจำนวนตรรกยะ ถ้า $b \neq 0$

1.6) $x + y$ เป็นจำนวนตรรกยะ

1.7) $x + y$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

1.8) $x \cdot y$ เป็นจำนวนตรรกยะ

1.9) $x \cdot y$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

1.10) $a + x$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

1.11) $a \cdot x$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

1.12) a^2 เป็นจำนวนตรรกยะ

1.13) x^2 เป็นจำนวนอตรรกยะ

1.14) $\sqrt{a}$ เป็นจำนวนตรรกยะ ถ้า $a > 0$

1.15) $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ ถ้า $a > 0$

7. ในระบบจำนวนจริง ข้อต่อไปนี้ ข้อใดถูก

2.1) $x > y \longrightarrow x - a > y - a$

2.2) $x > y \longrightarrow a - x > a - y$

2.3) $x > y \longrightarrow a \cdot x > a \cdot y$

2.4) $x > y$ และ $a > 0 \longrightarrow \frac{x}{a} > \frac{y}{a}$

2.5) $x > y$ และ $a < 0 \longrightarrow a \cdot x > a \cdot y$

2.6) $x > y$ และ $a > 0 \longrightarrow \frac{a}{x} > \frac{a}{y}$

2.7) $x > y$ แล้ว $x^2 > y^2$

2.8) $x > y > 0$ แล้ว $x^2 > y^2 > 0$

2.9) $a < x < b$ และ $c < y < d$ แล้ว $a + c < x + y < b + d$

2.10) $a < x < b$ และ $c < y < d$ แล้ว $a - c < x - y < b - d$

8. จงหาค่า a และค่า b จากข้อต่อไปนี้

ให้ $-1 < x < 3$ และ $2 < y < 5$ สำหรับข้อ 3.1 – 3.5

3.1) $a < x + y < b$

3.2) $a < x - y < b$

3.3) $a < x \cdot y < b$

3.4) $a < \frac{y}{x} < b$

ให้ $-1 < x < 3$ และ $-8 < y < 2$ สำหรับข้อ 3.6 – 3.10

3.6) $a < x + 2y < b$

$$3.7) \quad a < x - 2y < b$$

$$3.8) \quad a < x \cdot y < b$$

$$3.9) \quad a < \frac{x}{y} < b$$

$$3.10) \quad a < \frac{y}{x} < b$$

9. จงแก้สมการต่อไปนี้ และตอบในรูปของช่วง

$$4.1) \quad 2x - 3 \geq x + 2$$

$$4.2) \quad x - 2 \geq 0$$

$$4.3) \quad x + 3 \geq 0$$

$$4.4) \quad (x-2)(x+3) \geq 0$$

$$4.5) \quad \frac{x-2}{x+3} \geq 0$$

$$4.6) \quad \frac{(x-2)(x+4)}{x+3} \geq 0$$

$$4.7) \quad \frac{x(x+3)}{(x-2)(x+5)} \leq 0$$

$$4.8) \quad x^2 \geq 0$$

$$4.9) \quad x^2 > 0$$

$$4.10) \quad (x-1)^2 \leq 0$$

10. ให้ผู้เรียนบอกสมบัติการ ไม่เท่ากัน (เมื่อตัวแปรเป็นจำนวนจริงใดๆ)

$$1. \quad \text{ถ้า } x < 3 \text{ แล้ว } 2x < 6 \dots\dots\dots$$

$$2. \quad \text{ถ้า } y > 7 \text{ แล้ว } -2y - 14 \dots\dots\dots$$

$$3. \quad \text{ถ้า } x+1 > 6 \text{ แล้ว } x+2 > 7 \dots\dots\dots$$

$$4. \quad \text{ถ้า } y+3 < 5 \text{ แล้ว } y < 2 \dots\dots\dots$$

$$5. \quad \text{ถ้า } x < 7 \text{ และ } 7 < y \text{ แล้ว } x < y \dots\dots\dots$$

$$6. \quad \text{ถ้า } x < 0 \text{ แล้ว } -x > 0 \dots\dots\dots$$

$$7. \quad \text{ถ้า } x > 0 \text{ แล้ว } -x > 0 \dots\dots\dots$$

$$8. \quad \text{ถ้า } a > 0 \text{ แล้ว } a+1 > 0+1 \dots\dots\dots$$

$$9. \quad \text{ถ้า } b < 0 \text{ แล้ว } b + (-2) < 0 + (-2) \dots\dots\dots$$

$$10. \quad \text{ถ้า } c > -2 \text{ แล้ว } (-1)c < (-1)(-2) \dots\dots\dots$$

11. ถ้า $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, และ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ จงหา

$$1) \quad A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$2) \quad B \cup A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$3) \quad A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$4) \quad B \cap A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$5) \quad A - B = \{0, 5\}$$

$$6) \quad B - A = \emptyset$$

12. กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

จงหา

1. $A \cap B = \{\phi\}$

2. $B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

3. $B \cap C = \{3, 5, 7\}$

4. $A \cap C = \{4, 6\}$

5. $C' = \{1, 2, 8, 9, 10\}$

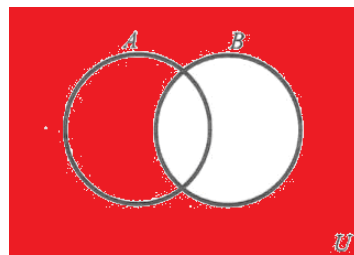
6. $C' \cap A = \{2, 8, 10\}$

7. $C' \cap B = \{1\}$

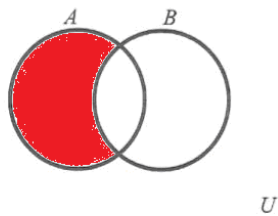
8. $(A \cap B) \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

13. จงระบายแผนภาพที่กำหนดให้เพื่อแสดงเซตต่อไปนี้

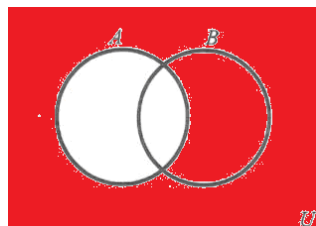
1. B'



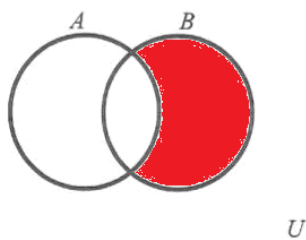
2. $A \cap B'$



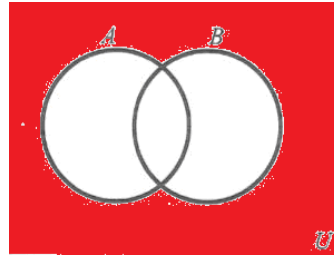
3. A'



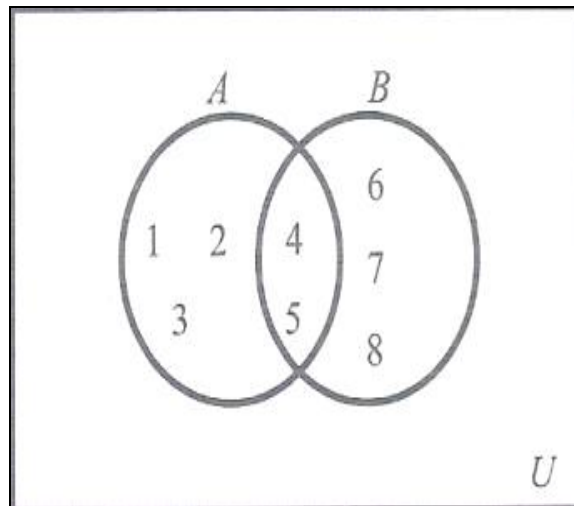
4. $A' \cup B$



5. $A' \cup B'$



14. จากแผนภาพที่กำหนดให้



จงหาค่า

1. $A' = \{4,5,6,7,8\}$
2. $(A \cap B)' = \{1,2,3,6,7,8\}$
3. $A' \cup B = \{4,5,6,7,8\}$
4. $A' \cap B = \{4,5,6,7,8\}$

บทที่ 6

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน²⁰

5.1 คู่อันดับ

คู่อันดับประกอบด้วยสมาชิก 2 ตัว เขียนแทนคู่อันดับในรูป (a,b) โดยที่ a เป็นสมาชิกตัวหน้าและ b เป็นสมาชิกตัวหลัง อันดับของสมาชิกถือว่าสำคัญ กล่าวคือการสลับที่กันระหว่างสมาชิกทั้งสองอาจทำให้ความหมายของคู่อันดับเปลี่ยนไปได้

สมบัติของคู่อันดับ

1. $(a,b) = (b,a)$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$
2. ถ้า $(a,b) = (c,d)$ แล้วจะได้ $a = c$ และ $b = d$
3. ถ้า $(a,b) \neq (c,d)$ แล้วจะได้ $a \neq c$ หรือ $b \neq d$

5.2 ผลคูณคาร์ทีเซียน

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือเซตของคู่อันดับ (a,b) ทั้งหมดซึ่ง a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B และเขียนแทนด้วย $A \times B$

นั่นคือ $A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B \}$

สมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน

กำหนด A, B และ C เป็นเซตใดๆ แล้ว

1. $A \times B$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $B \times A$
 $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$ หรือ $A = \emptyset$ หรือ $B = \emptyset$
 $A \times B \neq B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A \neq B \neq \emptyset$
2. $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
4. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
 $(A \cap B) \times C = (A \times B) \cap (B \times C)$
5. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
 $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$
6. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \times C \subset B \times C$
7. ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัดแล้ว $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$
8. ถ้า A เป็นเซตอนันต์ และ B เป็นเซตจำกัด ซึ่ง $B \neq \emptyset$ แล้ว $A \times B$ เป็นเซตอนันต์

²⁰ <http://www.vcharkarn.com/lesson/1477>, <http://www.tutormathphysics.com/index.php/component/content/article/113-math-m4-function/685-math-m4-function-4.html> , คณิตศาสตร์ ม.4 ความสัมพันธ์-ฟังก์ชัน, 28 เมษายน 2558.

ความสัมพันธ์ โดเมน และเรนจ์ของความสัมพันธ์

• ความสัมพันธ์

กำหนด A และ B เป็นเซตใดๆ แล้ว r เป็นความสัมพันธ์ จากเซต A ไปเซต B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

และ ถ้า r เป็นสับเซตของ $A \times A$ แล้ว r เป็นความสัมพันธ์ในเซต A

ตัวอย่างเช่น กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4\}$ และ $r = \{ (x,y) \in A \times B \mid y = 2x \}$

$$\therefore r = \{ (1,2), (2,4) \}$$

หมายเหตุ $(x, y) \in r$ อาจเขียนแทนด้วย $x r y$

โดเมน และเรนจ์ของความสัมพันธ์

***กำหนด r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย D_r

$$D_r = \{ x \mid (x, y) \in r \}$$

เรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วย R_r

$$R_r = \{ y \mid (x, y) \in r \}$$

หลักการหาโดเมน และเรนจ์ของความสัมพันธ์ เมื่อกำหนด r แบบบอกเงื่อนไขมาให้

- เมื่อต้องการหาโดเมน ให้จัด y ให้อยู่ในรูปของ x แล้วพิจารณาค่า x ทั้งหมดที่ทำให้ y หาค่าได้ และ $(x,y) \in r$
- เมื่อต้องการหาเรนจ์ ให้จัด x ให้อยู่ในรูปของ y แล้วพิจารณาค่า y ทั้งหมดที่ทำให้ x หาค่าได้ และ $(x,y) \in r$

ตัวอย่างเช่น กำหนด $r = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{x-2} \}$

$$1. \text{ หา } D_r : y = \frac{1}{x-2}$$

นั่นคือ y หาค่าได้เมื่อ $x-2 \neq 0$

$$\therefore D_r = \mathbb{R} - \{2\} = \{ x \mid x \neq 2 \}$$

$$2. \text{ หา } R_r : x = \frac{1}{y} + 2$$

นั่นคือ x หาค่าได้เมื่อ $y \neq 0$

$$\therefore R_r = \mathbb{R} - \{0\} = \{ y \mid y \neq 0 \}$$

ความหมายของฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งในสองคู่อันดับใดๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้าสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน

นั่นคือ

$$\text{ถ้า } (x_1, y_1) \in r \text{ และ } (x_1, y_2) \in r \text{ แล้ว } y_1 = y_2$$

หลักในการพิจารณาว่าความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันหรือไม่

1. ถ้าความสัมพันธ์นั้นอยู่ในรูปแจกแจงสมาชิก ให้ดูว่าสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับซ้ำกันหรือไม่ ถ้าสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับซ้ำกัน แสดงว่าความสัมพันธ์นั้น**ไม่**เป็นฟังก์ชัน
2. ถ้าความสัมพันธ์นั้นอยู่ในรูปของการกำหนดเงื่อนไขสมาชิก
 $r = \{(x, y) \in A \times B \mid P(x, y)\}$ ให้แทนค่าแต่ละสมาชิกของ x ลงในเงื่อนไข $P(x, y)$ เพื่อหาค่า y ถ้ามี x ตัวใดที่ให้ค่า y มากกว่า 1 ค่า แสดงว่าความสัมพันธ์นั้น**ไม่**เป็นฟังก์ชัน
3. พิจารณาจากกราฟของความสัมพันธ์ โดยการลากเส้นตรงขนานกับแกน y ถ้าเส้นตรงดังกล่าวตัดกราฟของความสัมพันธ์มากกว่า 1 จุด แสดงว่าความสัมพันธ์นั้น**ไม่**เป็นฟังก์ชัน

ฟังก์ชันจาก A ไป B

• ฟังก์ชันจาก A ไป B

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนคือเซต A และเรนจ์เป็นสับเซตของเซต B เขียนแทนด้วย $f: A \rightarrow B$

• ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต A และเรนจ์เป็นเซต B เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} B$

• ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ซึ่งถ้า $y \in R_f$ แล้วมี $x \in D_f$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $(x, y) \in f$ เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow{1-1} B$

หรืออาจกล่าวอย่างง่ายได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อสำหรับ x_1 และ x_2 ในโดเมน ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

• ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด

ให้ f เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ $R \times R$ และ $A \subset D_f$

- ♦ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มใน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก x_1 และ x_2 ใดๆ ใน A

$$\text{ถ้า } x_1 < x_2 \text{ แล้ว } f(x_1) < f(x_2)$$

- ♦ f เป็นฟังก์ชันลดใน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก x_1 และ x_2 ใดๆ ใน A

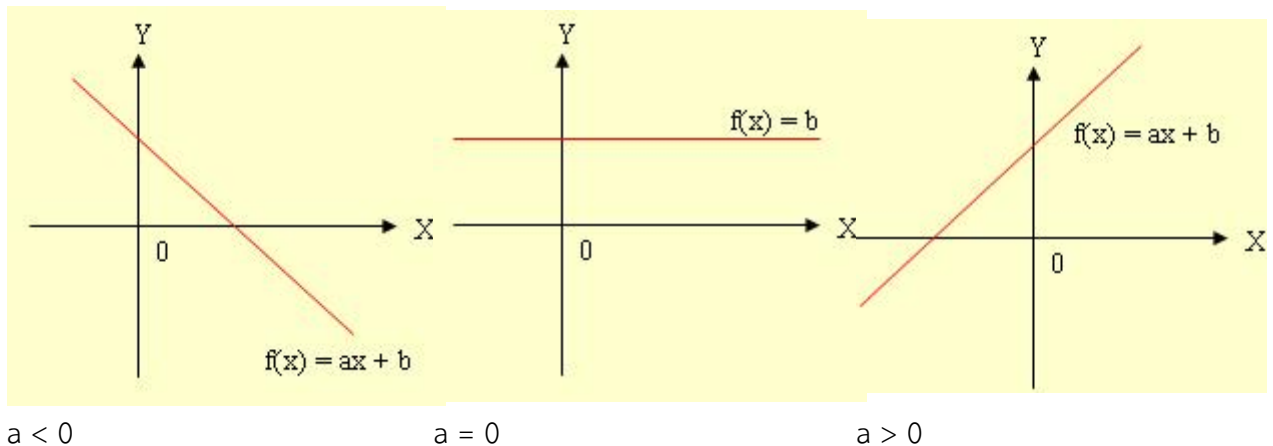
$$\text{ถ้า } x_1 < x_2 \text{ แล้ว } f(x_1) > f(x_2)$$

ฟังก์ชันที่ควรรู้จัก

- ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function)

$$f(x) = ax + b \text{ เมื่อ } a \text{ และ } b \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

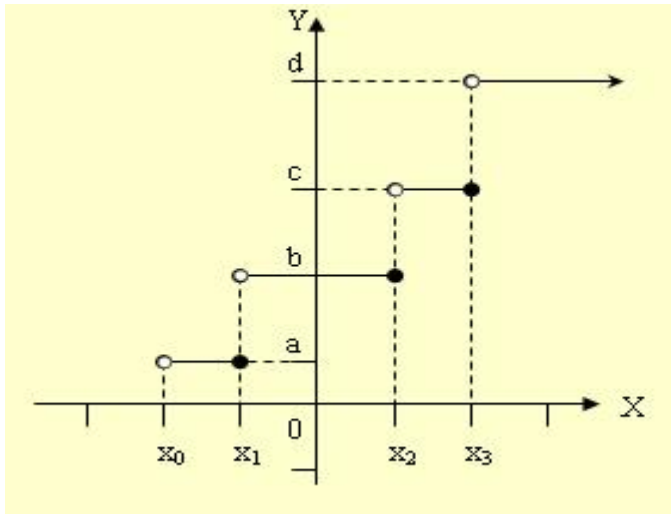
กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นจะมีลักษณะเป็นเส้นตรง



- ฟังก์ชันขั้นบันได (step function)

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } x_0 < x \leq x_1 \\ b & \text{เมื่อ } x_1 < x \leq x_2 \\ c & \text{เมื่อ } x_2 < x \leq x_3 \\ d & \text{เมื่อ } x > x_3 \end{cases}$$

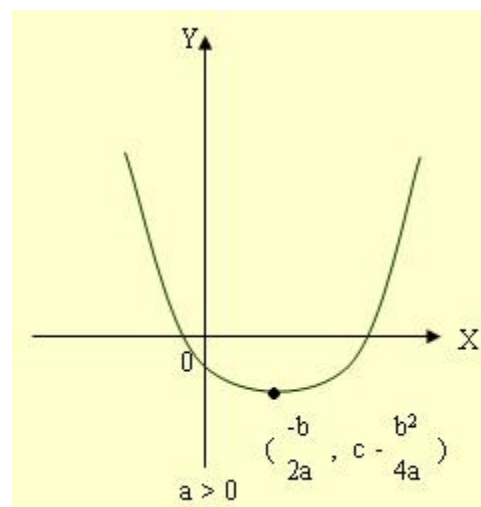
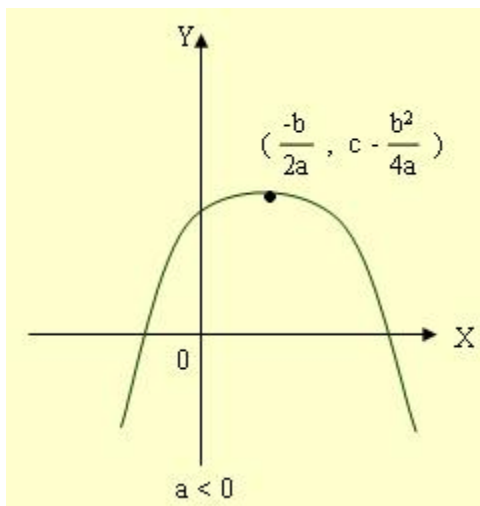
กราฟของฟังก์ชันนี้จะมีรูปร่างคล้ายขั้นบันได



- ฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function)

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ เมื่อ } a \text{ และ } b \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

กราฟของฟังก์ชันกำลังสองจะมีลักษณะเป็นรูปพาราโบลา



$$\text{ถ้า } a > 0 \text{ กราฟให้ค่าต่ำสุด} = c - \frac{b^2}{4a} \text{ เมื่อ } x = \frac{-b}{2a}$$

$$\text{ถ้า } a < 0 \text{ กราฟให้ค่าสูงสุด} = c - \frac{b^2}{4a} \text{ เมื่อ } x = \frac{-b}{2a}$$

- ฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function)

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

เมื่อ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง และ $n \in \mathbb{I}$

- ฟังก์ชันตรรกยะ (rational function)

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ เมื่อ } p, q \text{ เป็นฟังก์ชันพหุนาม}$$

- ฟังก์ชันที่เป็นคาบ (periodic function)

f เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง p ที่ทำให้ $f(x+p) = f(x)$ สำหรับ ทุกค่าของ x และ $x+p$ ที่อยู่ในโดเมนของ f

คำถามท้ายบท²¹

แบบฝึกทักษะที่ 1

- ถ้า $(x,y) = (4,5)$ จงหาค่า x, y

.....

- ถ้า $(x,y) \neq (4,5)$ จงหาค่า x, y

.....

- ถ้า $(x,3) = (-2,y)$ จงหาค่า x, y

.....

- ให้ $(2x+1, 13) = (3, 4y-3)$ จงหาค่าของ x, y

.....

.....

- ข้อต่อไปนี้จริงหรือเท็จ

..... 5.1 ถ้า $(a,b) \neq (c,d)$ แล้ว $a \neq c$ และ $b \neq d$

..... 5.2 ถ้า $(a,b) \neq (c,d)$ แล้ว $a \neq c$ หรือ $b \neq d$

..... 5.3 ถ้า $a \neq c$ หรือ $b \neq d$ แล้ว $(a,b) \neq (c,d)$

..... 5.4 ถ้า $a \neq c$ และ $b \neq d$ แล้ว $(a,b) \neq (c,d)$

แบบฝึกทักษะที่ 2

จงเขียน $A \times B$ และ $B \times A$ เมื่อกำหนดเซต A และ B ดังต่อไปนี้

- $A = \{1,2\}$ และ $B = \{3,4\}$

$A \times B =$

$n(A \times B) =$

$B \times A =$

$n(B \times A) =$

- $A = \{1,2\}$ และ $B = \{a,b,c\}$

$A \times B =$

$n(A \times B) =$

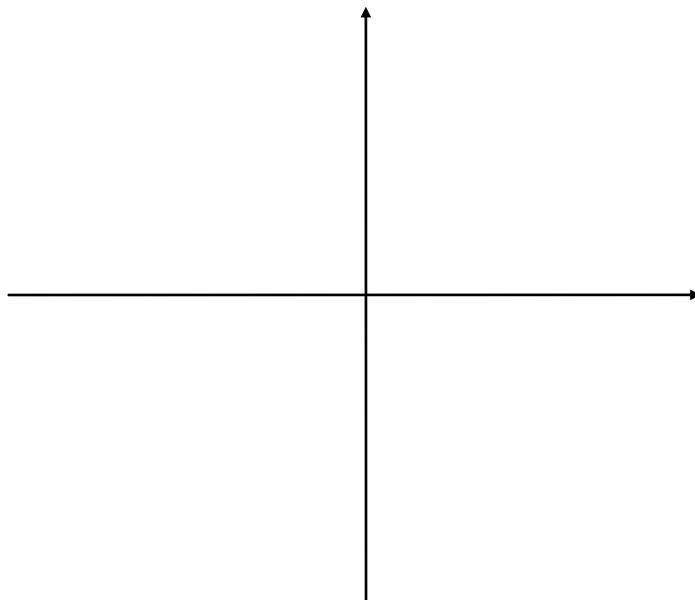
²¹ <http://mathpaper.net/index.php/2012-11-21-15-49-17>, 29 เมษายน 2558.

- $B \times A = \dots\dots\dots$
 $n(B \times A) = \dots\dots\dots$
3. $A = \{a,b\}$ และ $B = \{\emptyset\}$
 $A \times B = \dots\dots\dots$
 $n(A \times B) = \dots\dots\dots$
 $B \times A = \dots\dots\dots$
 $n(B \times A) = \dots\dots\dots$
4. $A = \emptyset$ และ $B = \{3,4,5\}$
 $A \times B = \dots\dots\dots$
 $n(A \times B) = \dots\dots\dots$
 $B \times A = \dots\dots\dots$
 $n(B \times A) = \dots\dots\dots$
5. $A = \{a,b\}$ และ $B = \{1,2,3\}$
 $A \times A = \dots\dots\dots$
 $n(A \times A) = \dots\dots\dots$
 $B \times B = \dots\dots\dots$
 $n(B \times B) = \dots\dots\dots$

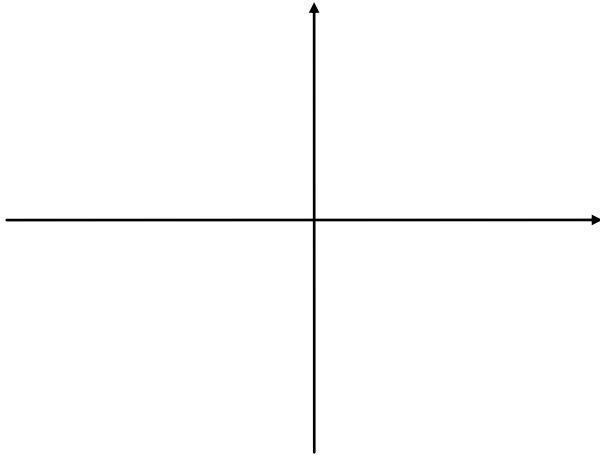
แบบฝึกทักษะที่ 3

จงเขียนกราฟความสัมพันธ์ต่อไปนี้

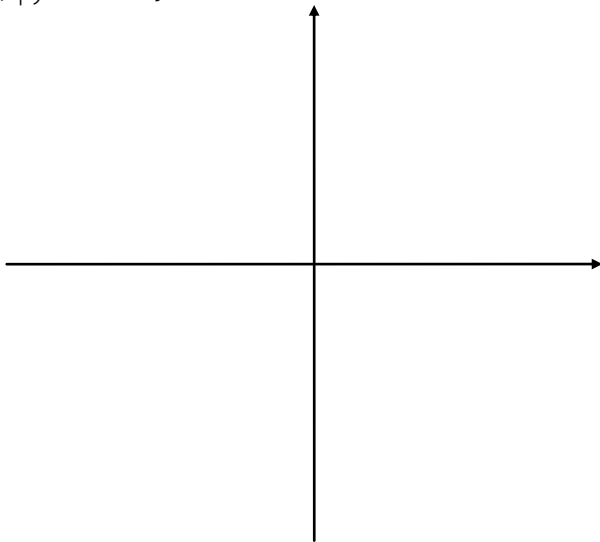
1. $r = \{(2,2),(2,6),(2,8),(3,6),(4,8)\}$



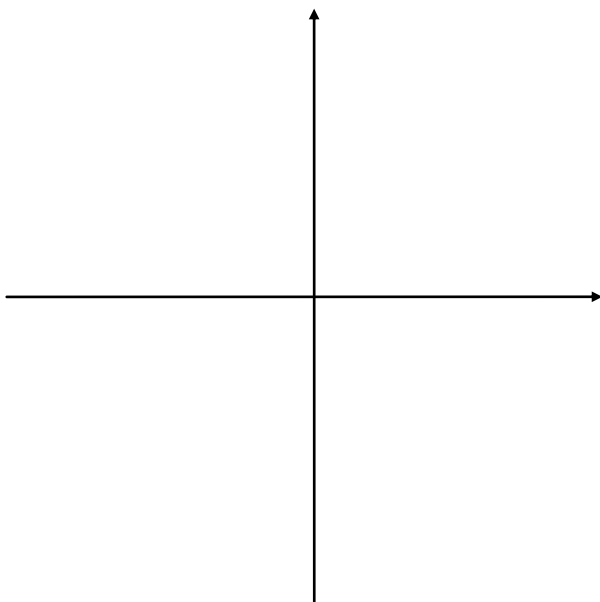
2. $r = \{(x,y) \in A \times A \mid y = 2x+1\}$ where $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,13\}$



3. $r = \{(x,y) \mid y = 2x+1\}$



4. $r = \{(x,y) \mid y > 2x+1\}$



บทที่ 7

สมการและอสมการ

7.1 สมการและอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

นิยาม 1 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว คือ สมการที่มีตัวแปรหรือตัวไม่ทราบค่า (unknown) และเลขชี้กำลังของตัวแปรเป็น 1 ตัวแปรอาจปรากฏเพียงข้างใดข้างหนึ่งของเครื่องหมาย “ = ” หรือ ปรากฏทั้งสองข้างแต่เมื่อจัดรูปให้อยู่ในรูปผลสำเร็จโดยมี x เป็นตัวแปร a, b เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ จะอยู่ในรูปแบบสมการเป็น

$$ax + b = 0$$

สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว จะมีคำตอบเพียงค่าเดียวเท่านั้น คือ จำนวนที่เมื่อนำไปแทนค่าตัวแปรในสมการแล้วทำให้สมการนั้นเป็นจริง บางครั้งจะเรียกคำตอบของสมการว่า *รากของสมการ*

คำสั่งของโจทย์ประเภทนี้มักใช้คำว่า จงแก้สมการ จงหาค่า x (ตัวแปรในสมการ) จงหารากของสมการหรือจงหาคำตอบของสมการ

สมการ 2 สมการจะสมมูลกันก็ต่อเมื่อคำตอบของสมการ ทั้งสองต้องเท่ากัน

1. การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ต้องอาศัยสมบัติการเท่ากันของจำนวนที่ว่า จำนวน 2 จำนวน ที่เท่ากันเมื่อเพิ่มหรือตัดออกเท่ากันย่อมเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1 จงหาคำตอบของสมการ $2x - 5 = 8$

วิธีทำ จากสมการ $2x - 5 = 8$

จะได้ $2x - 5 + 5 = 8 + 5$ (นำ 5 ไปบวกทั้งสองข้าง)

$$x + 7 = 9$$

จะได้ $x + 7 - 7 = 9 - 7$ (นำ -7 ไปบวกทั้งสองข้าง)

$$3x = 15$$

$$\frac{1}{3} \cdot 3x = 15 \cdot \frac{1}{3} \quad \left(\text{นำ } \frac{1}{3} \text{ ไปคูณทั้งสองข้าง} \right)$$

$$(1)x = 5$$

$$x = 5 \quad \text{นั่นคือ} \quad x = 5$$

ข้อแนะนำในการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวมีดังนี้

ทำให้เป็นผลสำเร็จโดยการจัดให้ตัวแปรและค่าคงตัวอยู่คนละข้างของเครื่องหมาย “ = ”

ตัวอย่างเช่น $3x + 4 = 10$

$$3x + 4 - 4 = 10 - 4 \quad \left(\text{นำ 4 ลบออกทั้งสองข้าง} \right)$$

$$3x = 6$$

$$\frac{1}{3} \cdot 3x = \frac{1}{3} \cdot 6 \quad \left(\text{นำ } \frac{1}{3} \text{ ลบออกทั้งสองข้าง} \right)$$

ดังนั้น

$$x = 2$$

2. ถ้าพบวงเล็บในสมการ เช่น $()$, $[]$ หรือ $\{ \}$ ต้องถอดวงเล็บทิ้งไป โดยถอดทีละวงเล็บ และต้องระมัดระวังอย่างยิ่งหน้าวงเล็บใดมีเครื่องหมาย “ - ” เมื่อถอดวงเล็บออกแล้วต้องเปลี่ยนเครื่องหมายทุกจำนวนภายในวงเล็บนั้นเป็นจำนวนตรงข้าม

ตัวอย่างเช่น

จะได้

$$\begin{aligned}
 1+2\{5-(3x-2)\} &= 3 \\
 1+2\{5-(3x-2)\}-1 &= 3-1 \quad (\text{นำ } 1 \text{ ลบออกทั้งสองข้าง}) \\
 2\{5-3x+2\} &= 2 \quad \text{อย่าลืม! เปลี่ยนเครื่องหมาย} \\
 \frac{1}{2} \cdot 2\{5-3x\} &= 2 \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{นำ } \frac{1}{2} \text{ คูณทั้งสองข้าง}) \\
 5-3x &= 1 \\
 5-3x-5 &= 1-5 \quad (\text{นำ } 5 \text{ ลบออกทั้งสองข้าง}) \\
 -\left(\frac{1}{3}\right) \cdot -3x &= -6\left(-\frac{1}{3}\right) \quad (\text{นำ } -\frac{1}{3} \text{ คูณทั้งสองข้าง})
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = 2$

3. การแก้สมการเมื่อจำนวนในสมการส่วนมากอยู่ในรูปเศษส่วน
จะไม่สะดวกในการทำให้เป็นผลสำเร็จ อาจทำให้ “ส่วน” หกตกไปโดยการนำ ค.ร.น. ของส่วนทั้งหมดคูณตลอดสมการนั้น

ตัวอย่างเช่น

$$\frac{3x-1}{2} + \frac{x-1}{3} = \frac{1-x}{4} - \frac{x-2}{12}$$

ค.ร.น. ของ 2, 3, 4 และ 12 คือ 12 คูณตลอด จะได้ ;

$$\begin{aligned}
 12 \cdot \frac{3x-1}{2} + 12 \cdot \frac{x-1}{3} &= 12 \cdot \frac{1-x}{4} - 12 \cdot \frac{x-2}{12} \\
 18x-6+4x-4 &= 3-3x-x+2 \\
 22x-10 &= 5-4x \\
 22x-10+10+4x &= 5-2x+10+2x \quad (\text{นำ } 10+2x \text{ บวกทั้งสองข้าง}) \\
 26x &= 15 \\
 \frac{1}{26} \cdot 26x &= 15 \cdot \frac{1}{26} \quad (\text{นำ } \frac{1}{26} \text{ คูณทั้งสองข้าง})
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = \frac{15}{26}$

ตัวอย่างเช่น

$$\frac{2x+1}{3} = \frac{x-2}{4}$$

$$4(2x+1) = 3(x-2) \quad (\text{เป็นการนำ ค.ร.น. ของส่วน คือ } 12 \text{ คูณตลอด})$$

$$8x-4 = 3x-6$$

$$8x-3x = -6+4$$

$$5x = -2$$

ดังนั้น $x = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$

ในบางกรณีที่มีเศษส่วนบางจำนวนไม่มากนัก อาจไม่ต้องนำ ค.ร.น. คูณตลอดตัวอย่างเช่น

$$\frac{3}{4}x + 5 = 23$$

$$\frac{3}{4}x = 23 - 5$$

$$\text{ดังนั้น} \quad x = 18 \cdot \frac{4}{3} = 24$$

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $2(5x-8)-7=4(1-2x)-3(x+2)$

$$\text{วิธีทำ} \quad \text{จาก} \quad 2(5x-8)-7=4(1-2x)-3(x+2)$$

$$10x-16-7=4-8x-3x-6$$

$$10x-23=-2-11x$$

$$10x+11x=23-2$$

$$21x=21$$

ดังนั้น

$$x=1$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงหารากของสมการ $2(x-1.2)+3(x+1.5)=4.1$

$$\text{วิธีทำ} \quad 2(x-1.2)+3(x+1.5)=4.1$$

$$2x-2.4+3x+4.5=4.1$$

$$5x+2.1=4.1$$

$$5x=2$$

ดังนั้น

$$x = \frac{2}{5} = 0.4$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาคำตอบของสมการ $\frac{4x-2}{3} - \frac{3(x+1)}{2} = 1 - \frac{x-1}{4}$

$$\text{วิธีทำ} \quad \frac{4x-2}{3} - \frac{3(x+1)}{2} = 1 - \frac{x-1}{4}$$

นำ ค.ร.น. ของ 3, 2 และ 4 คือ 12 คูณตลอด จะได้;

$$12 \cdot \frac{4x-2}{3} - 12 \cdot \frac{3(x+1)}{2} = 12 - 12 \cdot \frac{x-1}{4}$$

$$16(x-2) - 18(x+1) = 12 - 3(x-1)$$

$$16-32-18x-18=12-3x+3$$

$$-20x-50=15-3x$$

$$3x-20x=15+50$$

ดังนั้น

$$x = 65$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $\frac{3}{4}(1-x) + \frac{2}{3}(x-1) = \frac{1}{5}(x+2)$

$$\text{วิธีทำ} \quad \frac{3}{4}(1-x) + \frac{2}{3}(x-1) = \frac{1}{5}(x+2)$$

นำ ค.ร.น. ของ 4, 3, 5 คือ 60 คูณตลอด จะได้;

$$45(1-x) + 40(x-1) = 12(x+2)$$

$$45 - 45x + 40x - 40 = 12x + 24$$

$$5 - 5x = 12x + 24$$

$$-5x - 12x = 24 - 5$$

$$-17x = 19$$

ดังนั้น

$$x = -\frac{19}{17}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 5 จงแก้สมการ $\frac{x}{2} - 3 = \frac{1}{4}(x-1) - \frac{2}{3}(1-\frac{x}{2})$

วิธีทำ

$$\frac{x}{2} - 3 = \frac{1}{4}(x-1) - \frac{2}{3}(1-\frac{x}{2})$$

นำ ค.ร.น. ของส่วน (2, 4, 6) คือ 12 คูณตลอด จะได้;

$$6x - 36 = 3(x-1) - 8(1-\frac{x}{2})$$

$$6x - 36 = 3x - 3 - 8 + 4x$$

$$6x - 36 = 3x - 3 - 8 + 4x$$

$$6x - 7x = 36 - 11$$

$$-x = 25$$

ดังนั้น

$$-x = 25$$

ตอบ

7.2 โจทย์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

โจทย์ประเภทนี้จะมีข้อความที่ไม่ทราบค่าปรากฏอยู่ และข้อความที่เกี่ยวข้องกับข้อความอื่น ๆ อีกหลายข้อความในโจทย์นั้น ซึ่งอาจมีความสัมพันธ์กับข้อความนั้น ๆ โดยตรงหรือโดยอ้อม การแก้ปัญหาเกี่ยวกับโจทย์สมการก็คือการหาคำตอบของโจทย์นั่นเอง โดยวิธีการกำหนดตัวแปรแทนข้อความที่ไม่ทราบค่านั้น (นิยมใช้ x เป็นตัวแปร) แล้วเขียนข้อความอื่น ๆ ในรูปของ x นี้ สร้างสมการขึ้นมา

ตัวอย่างเช่น ก มีเงินมากกว่า ข อยู่ 12 บาท ก กับ ข มีเงินรวมกัน 88 บาท ก มีเงินเท่าไร

วิธีทำ ให้ ก มีเงิน x บาท จะได้ ข มีเงิน $x - 12$ บาท

ก และ ข มีเงินรวมกัน 88 บาท

สมการคือ

$$x + (x - 12) = 88$$

$$2x = 88 + 12$$

$$x = \frac{100}{2} = 50$$

นั่นคือ ก มีเงิน 50 บาท

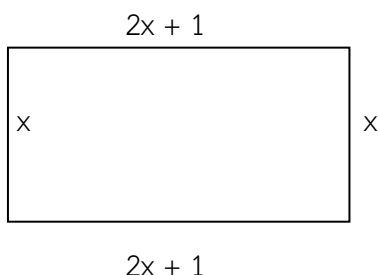
ข้อแนะนำในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับโจทย์ปัญหาสมการทั่วไป มีดังนี้

1) เมื่ออ่านปัญหาโจทย์แล้วจะต้องกำหนดตัวแปรแทนข้อความที่ยังไม่ทราบค่าในโจทย์ซึ่งอาจมีหลายข้อความโดยทั่วไปมักจะกำหนดตัวแปรแทนข้อความที่โจทย์ถาม แต่ไม่จำเป็นต้องทำเช่นนี้ทุกครั้ง ทั้งนี้เนื่องจากบางครั้งการทำเช่นนี้จะทำให้เข้าสมการ (เขียนความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรกับข้อความอื่นๆ ที่ปรากฏในโจทย์) ไม่สะดวกหรืออาจทำได้ยากกว่าการกำหนดตัวแปรแทนข้อความอื่น (ที่โจทย์มิได้ถาม) ซึ่งมีความคล่องในการ

เขียนสมการสัมพันธ์กับข้อความต่าง ๆ ที่ปรากฏในโจทย์ แต่ต้องระวังเวลาตอบต้องไม่ตอบค่าของตัวแปรนั้น จะต้องนำค่าตัวแปรไปแทนข้อความที่โจทย์ถาม

ตัวอย่างเช่น สี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งมีเส้นรอบรูปยาว 14 นิ้ว มีด้านยาวยาวกว่าสองเท่าของด้านกว้างอยู่ 1 นิ้ว สี่เหลี่ยมนี้มีพื้นที่เท่าใด

วิธีทำ กำหนดตัวแปร (x) แทนข้อความที่โจทย์ถามจะไม่สะดวก จึงควรกำหนดให้สี่เหลี่ยมมีด้านกว้าง x นิ้ว



$$\begin{aligned} \therefore \quad & \text{ด้านยาวจะยาว } 2x + 1 \text{ นิ้ว} \\ & \text{เส้นรอบรูปยาว } 14 \text{ นิ้ว} \\ \text{เข้าสมการได้} \quad & 2[x + (2x + 1)] = 14 \\ & 3x + 1 = 7 \\ & x = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad & \text{ด้านกว้างยาว เท่ากับ } 2 \text{ นิ้ว} \\ & \text{ด้านยาวยาว เท่ากับ } 2(2) + 1 = 5 \text{ นิ้ว} \\ \text{นั่นคือ} \quad & \text{สี่เหลี่ยมผืนผ้ามีพื้นที่เท่ากับ } 2(5) = 10 \text{ ตารางนิ้ว} \end{aligned}$$

ข้อสังเกต ยังนิยมใช้ x เป็นตัวแปรแทนข้อความที่ไม่ทราบค่าหลังคำว่า “ของ” เช่น ในข้อแนะนำข้อที่ 1 มีข้อความว่า

ด้านยาวยาวกว่าสองเท่าของด้านกว้างอยู่	1	นิ้ว
ให้ ด้านกว้างยาว	x	นิ้ว
ดังนั้น ด้านยาวจะยาว	2x + 1	นิ้ว

อีกวิธี ให้ ด้านยาวยาว x นิ้ว

$$\begin{aligned} & \text{ด้านยาวยาวกว่าสองเท่าของด้านกว้างอยู่ } 1 \text{ นิ้ว} \\ & x - 2(\text{ด้านกว้าง}) = 1 \\ \text{จะได้} \quad & \frac{x-1}{2} = \text{ด้านกว้าง} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า วิธีแรกสะดวกกว่าวิธีหลังและรวดเร็วกว่า

2) นิยมกำหนดตัวแปรแทนข้อความที่ไม่ทราบค่าซึ่งปรากฏหลายครั้งในโจทย์

ตัวอย่างเช่น ปูมีเงินมากกว่ากุ้ง 320 บาท แต่กุ้งมีเงินน้อยกว่าปลา 125 บาท ทั้งสามคนมีเงินรวมกัน 1,000 บาท แต่ละคนมีเงินเท่าใด

วิธีทำ ให้ กุ้งมีเงิน x บาท $\therefore$ ปูมีเงิน x + 320 บาท ดังนั้น ปลามีเงิน x + 125 บาท

เนื่องจากโจทย์ข้อนี้ถามจำนวนเงินของทุกคน ให้ x เป็นจำนวนเงินของใครก็ได้ แต่ให้กั๋งจะสะดวกที่สุดแต่ถ้าโจทย์ถามเงินของปลาคนเดียว การให้ x เป็นจำนวนเงินของปลาจะดีกว่าเนื่องจากเมื่อหาค่า x ได้จะได้คำตอบเลย

นั่นคือ ให้ปลามีเงิน x บาท $\therefore$ กั๋งมีเงิน $x - 125$ บาท ดังนั้น ปูมีเงิน $(x - 125) + 320$ บาท

3) เครื่องหมาย “=” มักจะสร้างจากข้อความ เป็น, อยู่, จะได้(ได้), เท่ากับ, รวมกับ, ต่างกัน, หรือมาจากการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างข้อความ

ตัวอย่างเช่น

กำไร = ราคา - ต้นทุน

รายได้ = จำนวนสิ่งที่ขาย $\times$ ราคาขายต่อหน่วย

4) บางครั้งอาจปลั่งผลอเข้าสมการผิด ต้องระวัง ตัวอย่างเช่น ข้อความว่า 3 ใน 4 ของเงินของฉันน้อยกว่า 1 ใน 2 ของเงินของเพื่อนอยู่ 80 บาท ถ้าเรา 2 คนมีเงินรวมกัน 500 บาท ฉันมีเงินเท่าใด ให้ ฉันมีเงิน x บาท เพื่อนจะมี $500 - x$ บาท

$$\text{สมการจะเป็น } \frac{1}{2}(500 - x) - \frac{3}{4}x = 80$$

ต้องระวังข้อความ “น้อยกว่า” ต้องนำจำนวนมาก - จำนวนน้อย นำข้อความข้างหลังขึ้นก่อน จะได้ จำนวนแรก - จำนวนหลัง ไม่ได้

5) ระลึกเสมอว่า โจทย์ถามอะไร เมื่อให้ตัวแปรแทนข้อความใดแล้วให้ใส่หน่วยของตัวแปร (x) ด้วย แล้วนำ x ไปสร้างความสัมพันธ์เพื่อนำมาสู่รูปสมการ เมื่อได้คำตอบของ x แล้ว ให้พิจารณาก่อนตอบสักเล็กน้อยว่าสอดคล้องกับโจทย์หรือไม่ เนื่องจากบางคำตอบในรูปจำนวนเต็มบวก จะอยู่ในรูปเศษส่วนหรือทศนิยม ไม่ได้จำนวนเหล่านี้มักมีหน่วยว่า อัน, ตัว, เล่ม, คน หรือบางครั้งค่า x อาจได้ค่าลบซึ่งส่วนมากค่า x ในสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว จะได้ค่าเดียวที่เป็นบวก เมื่อมีการนิยามผลต่างกล่าวเกิดขึ้นอาจเนื่องมาจาก

ก. อ่านโจทย์ไม่เข้าใจความเกี่ยวข้องระหว่างข้อความต่าง ๆ ทำให้เข้าสมการไม่ถูกต้อง

ข. รีบร้อนทำโดยไม่ระวังเท่าที่ควร เกี่ยวกับการบวกหรือลบกันต้องเป็นจำนวนในหน่วยเดียวกัน แต่ละเลยไม่ระวังอาจก่อปัญหาได้ ดังนั้นควรระบุหน่วยของตัวแปร (x) ให้แน่นอน ถ้าเป็นหน่วยเดียวกับหน่วยที่โจทย์ถามจะดีมาก

ค. ขาดทักษะในการแก้สมการมาก่อน ทำให้มีปัญหาเกี่ยวกับการแก้สมการ

ง. คิดเลขผิดพลาด ซึ่งเป็นข้อผิดพลาดพื้นฐาน บางครั้งอาจเกิดจากความเลินเล่อหรือเกิดจากความไม่รู้จริง

ตัวอย่างเช่น

$$\frac{4x+5}{2} = 2x+5 \quad \text{นำ 2 ไปหาร 4 แต่ไม่หาร 5}$$

$$\text{หรือผิดอย่างนี้} \quad 3 - 2(x+1) = 3 - 2x - 1 \quad \text{นำ 2 คูณในวงเล็บไม่ตลอด}$$

$$\text{หรือผิดอีกอย่าง} \quad 1 - 3(x-5) = 1 - 3x - 15 \quad \text{ถอดวงเล็บไม่ระวัง}$$

6) ถ้ามีเวลาอาจตรวจคำตอบที่ได้ว่าถูกต้องแน่นอน โดยการนำไปแทนในโจทย์ว่าสอดคล้องกับโจทย์ ปัญหาข้อนั้น ๆ หรือไม่ และเป็นทางออกทางหนึ่งเมื่อโจทย์ข้อสอบเป็นแบบเลือกตอบ ถ้าทำไม่ได้หรือได้คำตอบไม่ตรงกับตัวเลือกเลย อาจแก้ปัญหาโดยการไล่หาคำตอบจากตัวเลือกโดยนำไปตรวจสอบทีละค่าในโจทย์ก็ได้

7) พี่ระลึกเสมอว่า ทักษะการเข้าสมการต้องใช้อีกมาก ดังนั้นควรฝึกให้เป็นในบทเรียนบทแรกนี้ ในขั้นนี้จะพบอีกในเรื่องสมการกำลังสองและสมการเชิงเส้นสองตัวแปร อีกทั้งต้องใช้ทักษะนี้ในชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายอีกด้วย

8) ตรวจสอบตนเองอีกครั้งว่ามีความรู้เรื่องต่อไปนี้หรือไม่

1. ระยะทาง เวลา และอัตราเร็ว มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\text{ระยะทาง} = \text{อัตราเร็ว} \times \text{เวลา}$$

$$\text{เวลา} = \frac{\text{ระยะทาง}}{\text{อัตราเร็ว}}$$

$$\text{อัตราเร็ว} = \frac{\text{ระยะทาง}}{\text{เวลา}}$$

2. อายุกับอดีต ปัจจุบัน อนาคต

$$\text{อายุในอดีต} = \text{อายุในปัจจุบัน} - \text{จำนวนปีที่ล่วงมาแล้ว}$$

$$\text{อายุในอนาคต} = \text{อายุในปัจจุบัน} + \text{จำนวนปีที่จะมาถึงข้างหน้า}$$

3. การ หาร เกี่ยวกับ ตัวตั้ง ตัวหาร และผลหาร รวมทั้งเศษด้วย (ถ้ามี)

$$\frac{\text{ตัวตั้ง} - \text{เศษ}}{\text{ตัวหาร}} = \text{ผลหาร}$$

4. ร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์ (%)

กำไร หรือขาดทุน ร้อยละเท่าใด ต้องคิดจากต้นทุนหนึ่งร้อยเสมอ
ประกาศลดราคากี่เปอร์เซ็นต์ (%) ต้องคิดจากราคาป้ายหนึ่งร้อยเสมอ

5. ตัวเลข

เลขสามจำนวนเรียงกันจะห่างกันจำนวนละหนึ่ง อาจกำหนด $x, x+1, x+2$ หรือ $x-1, x, x+1$ ก็ได้

จำนวนสี่เรียงกันหรือจำนวนคู่เรียงกันจะห่างกันทีละสอง อาจกำหนด $x, x+2, x+4$ หรือ $x-2, x, x+2$ ก็ได้

6. แสตนป์หรือเหรียญ

$$\text{มูลค่าทั้งหมด} = \text{ผลบวกของมูลค่ารวมของแสตนป์หรือเหรียญแต่ละชนิด}$$

7. จำนวนสิ่งของ ราคาทั้งหมด ราคาต่อหน่วย

$$\text{จำนวนสิ่งของ} = \frac{\text{ราคาทั้งหมด}}{\text{ราคาต่อหน่วย}}$$

$$\text{ราคาของทั้งหมด} = \text{จำนวนสิ่งของ} \times \text{ราคาต่อหน่วย}$$

ตัวอย่าง 6 หมูกับไก่รวมกันอยู่ 32 ตัว นับขารวมกันได้ 68 ขา ถามว่ามีหมูอยู่ที่ตัว

วิธีทำ ให้จำนวนหมูมี x ตัว $\therefore$ จำนวนขาหมูจะมี $4x$ ขา

จำนวนไก่มี $32 - x$ ตัว ($\therefore$ หมูกับไกรวมกันมี 32 ตัว)

$\therefore$ จำนวนขาไก่จะมี $2(32 - x)$ ขา

หมูและไก่มีขารวมกัน 68 ขา

สมการคือ $4x + 2(32 - x) = 68$ ขา

$$4x + 64 - 2x = 68$$

$$2x = 68 - 64$$

$$\therefore x = \frac{4}{2} = 2$$

ดังนั้น มีหมูทั้งหมด 2 ตัว

ตอบ

ตัวอย่าง 7 รถยนต์โดยสารคันหนึ่งแล่นจากเมืองหนึ่งไปยังอีกเมืองหนึ่งเป็นประจำทุกวัน คนขับสังเกตเห็นว่า ถ้าเขาขับรถด้วยความเร็วชั่วโมงละ $52\frac{1}{2}$ กิโลเมตร จะถึงปลายทางช้าไป 10 นาที แต่จะเข้าไปเพียง 1 นาที

20 วินาที เท่านั้น ถ้าเขาขับรถชั่วโมงละ 54 กิโลเมตร จงหาว่าเมืองทั้งสองอยู่ห่างกันเท่าไร

วิธีทำ ให้เมืองทั้งสองอยู่ห่างกัน x กิโลเมตร

ตอนแรก: รถวิ่ง $52\frac{1}{2} = \frac{105}{2}$ กิโลเมตร ใช้เวลา 1 ชั่วโมง

ถ้ารถวิ่ง x กิโลเมตร ใช้เวลา $\frac{2x}{105}$ ชั่วโมง

ตอนหลัง: รถวิ่ง 54 กิโลเมตร ใช้เวลา 1 ชั่วโมง

ถ้ารถวิ่ง x กิโลเมตร ใช้เวลา $\frac{x}{54}$ ชั่วโมง

เวลาที่เข้าไปตอนแรก $\neq$ เวลาที่เข้าไปตอนหลัง

เนื่องจาก ตอนแรกเข้าไป 10 นาที หรือ $\frac{1}{6}$ ชั่วโมง

ตอนหลังเข้าไป 1 นาที 20 วินาที หรือ $\frac{1}{45}$ ชั่วโมง

เวลาพอดี = เวลาในตอนแรก $-\frac{1}{6}$ หรือเวลาในตอนหลัง $-\frac{1}{45}$

สมการคือ $\frac{2x}{105} - \frac{1}{6} = \frac{x}{54} - \frac{1}{45}$

$$\frac{2x}{105} - \frac{x}{54} = \frac{1}{6} - \frac{1}{45}$$

นำ ค.ร.น. ของ 105, 54, 6, 45 คือ 1,890 คูณตลอด;
จะได้ $36x - 35x = 315 - 42$
 $\therefore x = 273$

ดังนั้น เมืองทั้งสองห่างกัน 273 กิโลเมตร

ตอบ

ตัวอย่าง 8 สมชายอายุแก่กว่าสมหญิง 8 ปี อีก 8 ปีข้างหน้าอายุคนทั้งสองรวมกันได้ 68 ปี
จงหาอายุปัจจุบันของเขาทั้งสอง

วิธีทำ ให้ ปัจจุบันสมหญิงอายุ x ปี สมชายจะอายุ $x + 8$ ปี
อีก 8 ปีข้างหน้าสมหญิงอายุ $x + 8$ ปี
อีก 8 ปีข้างหน้าสมชายอายุ $(x+8)+8 = x+16$ ปี
สมการคือ $(x+8)+(x+16) = 68$
 $2x+24 = 68$
 $2x = 68 - 24$
 $\therefore x = \frac{44}{2} = 22$

ดังนั้น ปัจจุบันสมหญิงอายุ 22 ปี และปัจจุบันสมชายอายุ 30 ปี ตอบ

ตัวอย่างที่ 9 ซื้อสมุดฉีกมา 72 เล่ม ราคาโหลละ 30 บาท แล้เลือกเอาแต่เล่มดี ๆ ขายไปเล่มละ 3 บาท ส่วนพวกที่ชำรุดเก็บไว้ยังได้กำไรถึง 10% จงหาจำนวนสมุดฉีกที่ชำรุด

วิธีทำ ให้จำนวนสมุดฉีกที่ชำรุดมี x เล่ม $\therefore$ ขายสมุดฉีกไปเพียง $72 - x$ เล่ม

ขายในราคาเล่มละ 3 บาท ได้เงิน $3(72 - x)$ บาท

ลงทุน 12 เล่ม ราคา 30 บาท

ลงทุน 72 เล่ม $\frac{30 \times 72}{12} = 180$ บาท

$\therefore$ ขายไปได้กำไร $3(72 - x) - 180$ บาท

คิดเป็นกำไร 10 % จากการลงทุน 180 บาท

$\therefore$ กำไรทั้งหมดเป็น $\frac{10 \times 180}{100} = 18$ บาท

สมการคือ $3(72 - x) - 180 = 18$

$$72 - x = \frac{198}{3}$$

$$72 - x = 66$$

$$\therefore x = 72 - 66 = 6$$

ดังนั้น สมุดฉีกที่ชำรุดมี 6 เล่ม

ตอบ

ตัวอย่าง 10 ระหว่างเมือง ก กับเมือง ข มีถนนสองสายซึ่งยาวเท่ากัน 20 กิโลเมตร ถ้าขับรถยนต์ไปตามถนนสายยาวด้วยความเร็ว 45 กิโลเมตรต่อชั่วโมงโดยตลอด แต่หยุดพักเติมน้ำมันเสีย 5 นาที จะไปถึงพร้อมกับรถยนต์ไปตามถนนสายสั้นด้วยความเร็ว 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมงโดยไม่หยุดเลย จงหาความยาวของถนนทั้งสองสาย

วิธีทำ ให้ถนนสายยาวมีความยาว x กิโลเมตร

$\therefore$ ถนนสายสั้นจะยาว $x - 20$ กิโลเมตร

ถ้าขับรถยนต์ได้ทาง 45 กิโลเมตร ใช้เวลา 1 ชั่วโมง

$\therefore$ ถนนสายยาว x กิโลเมตร ใช้เวลา $\frac{x}{45}$ กิโลเมตร

ถ้าขับรถยนต์ได้ทาง 40 กิโลเมตร ใช้เวลา 1 ชั่วโมง

$\therefore$ ถนนสายสั้น $x - 20$ กิโลเมตร จะใช้เวลา $\frac{x - 20}{40}$ ชั่วโมง

ขณะขับไปตามถนนสายยาวได้หยุดเติมน้ำมัน 5 นาที $= \frac{5}{60}$ ชั่วโมง

ไปตามถนนสายยาวหรือสายสั้นก็ถึงพร้อมกัน ใช้เวลาเท่ากัน

$$\text{สมการคือ} \quad \frac{x}{45} + \frac{5}{60} = \frac{x - 20}{40}$$

นำ ค.ร.น. คือ 360 คูณตลอด ; $8x + 30 = 9x - 180$

$$180 + 30 = 9x - 8x$$

ดังนั้น ถนนสายยาว 210 กิโลเมตร และถนนสายสั้นยาว $210 - 20 = 190$ กิโลเมตร ตอบ

ข้อสังเกต ถ้าข้อสอบเป็นแบบเลือกตอบมักป้องกันนักเรียนหาคำตอบ ด้วยการตรวจสอบตัวเลือกทีละตัว อาจถามว่าถนนสองสายรวมกันเท่าใด

ตัวอย่างที่ 11 ในการจัดงานให้คนกลุ่มหนึ่งทำพบว่า ถ้าจัดให้ทำคนละงาน จะเหลือคนถึง 12 คนที่ไม่มีงานทำ แต่ถ้าจัดให้ทำงานละ 3 คน จะมีงานเหลืออีก 2 งาน อยากทราบว่ามียานทั้งหมดกี่งาน

วิธีทำ ให้ แสตมป์ดวงละ 2 บาท มีจำนวน x ดวง

แสตมป์ดวงละ 5 บาท จะมี $x + 12$ ดวง

แสตมป์ดวงละ 1.25 บาท จะมี $x - 21$ ดวง

มูลค่าของแสตมป์ดวงละ 2 บาท ทั้งหมดเป็นเงิน $2x$ บาท

มูลค่าของแสตมป์ดวงละ 5 บาท ทั้งหมดเป็นเงิน $5(x + 12)$ บาท

มูลค่าของแสตมป์ดวงละ 1.25 บาท ทั้งหมดเป็นเงิน $1.25(x - 21)$ บาท

แสตมป์ทั้งหมดมีมูลค่า $2x + 5(x + 12) + 1.25(x - 21)$ บาท

$$\text{สมการคือ} \quad 2x + 5(x + 12) + 1.25(x - 21) = 446.25$$

$$2x + 5x + 60 + 1.25x - 26.25 = 446.25$$

$$8.25x + 33.75 = 446.25$$

$$x = 412.50 = \frac{8.25}{50}$$

มีแสตมป์ดวงละ 2 บาท จำนวน 50 ดวง

วิธีทำ ให้ แสตมป์ดวงละ 2 บาท มีจำนวน x ดวง

แสตมป์ดวงละ 5 บาท จะมี $x + 12$ ดวง

แสตมป์ดวงละ 1.25 บาท จะมี $x - 21$ ดวง

มูลค่าของแสตมป์ดวงละ 2	บาททั้งหมดเป็นเงิน	$2x$	บาท
มูลค่าของแสตมป์ดวงละ 5	บาททั้งหมดเป็นเงิน	$5(x + 12)$	บาท
มูลค่าของแสตมป์ดวงละ 1.25	บาททั้งหมดเป็นเงิน	$1.25(x - 12)$	บาท
แสตมป์ทั้งหมดมีมูลค่า $2x + 5(x + 12) + 1.25(x - 12)$ บาท			
สมการคือ $2x + 5(x + 12) + 1.25(x - 12) = 446.25$			
$2x + 5x + 60 + 1.25 - 26.25 = 446.25$			
$8.25x + 33.75 = 446.25$			
$x = \frac{412.50}{8.25} = 50$			
มีแสตมป์ดวงละ 2	บาทจำนวน	50	ดวง
มีแสตมป์ดวงละ 5	บาทจำนวน	62	ดวง
มีแสตมป์ดวงละ 1.25	บาทจำนวน	29	ดวง
ดังนั้น มีแสตมป์ทั้งหมด เท่ากับ $50 + 62 + 29 = 141$ ดวง			

7.3. อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

นิยาม 2

อสมการ เป็นประโยคสัญลักษณ์ที่มีเครื่องหมาย $>$, $<$, $\leq$, $\geq$ หรือ $\neq$
 เช่น $3x - 2 < 5$, $2x - 1 \neq 8$ - $5 \leq 2x + 1 < 3$

คำตอบของสมการคือ จำนวนทุกจำนวนที่นำไปแทนค่าตัวแปรในสมการนั้น แล้วทำให้อสมการนั้นเป็นจริง อสมการที่สมมูลกัน จะต้องมีคำตอบเหมือนกันทุกค่า

สมบัติเกี่ยวกับการไม่เท่ากัน สำหรับการบวก และ การคูณ จะนำมาใช้ในการแก้สมการ ดังนี้
 เมื่อกำหนด a , b , c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$
2. ถ้า $a < b$ แล้ว $a - b < 0$
3. ถ้า $a < b$ แล้ว $ac < bc$ เมื่อ $c > 0$
 แต่ถ้า $a < b$ แล้ว $ac > bc$ เมื่อ $c < 0$
4. ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$
5. ถ้า $a > b$ แล้ว $a - b > 0$
6. ถ้า $a > b$ แล้ว $ac > bc$ เมื่อ $c > 0$
 $ac < bc$ เมื่อ $c < 0$

ข้อควรระวัง เมื่อนำจำนวนลบคูณตลอดอสมการ ต้องเปลี่ยนเครื่องหมาย “ $<$ ” เป็น “ $>$ ” หรือเปลี่ยนเครื่องหมาย “ $>$ ” เป็น “ $<$ ”

เช่น $3x - 8 < 1 + 5x$

$$3x - 5x < 1 + 8$$

$$-2x < 9$$

$$\text{นำ } -\frac{1}{2} \text{ คูณตลอดอสมการ จะได้ ; } x > \frac{9}{2}$$

สมการและอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ตัวอย่าง 16 จงแก้สมการ $3(x + 4) - 2(1 - x) \leq 15$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} 3(x + 4) - 2(1 - x) &\leq 15 \\ 3x + 12 - 2 + 2x &\leq 15 \\ 5x &\leq 15 - 10 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x \leq \frac{5}{5} \leq 1$ ตอบ

ตัวอย่าง 17 จงแก้สมการ $\frac{x-1}{3} - \frac{2+3x}{4} \leq 1$

วิธีทำ
$$\frac{x-1}{3} - \frac{2+3x}{4} \leq \frac{1}{2}$$

นำ 12 คูณตลอดอสมการ จะได้ ; $4(x-1) - 3(2+3x) \leq 6$

$$\begin{aligned} 4x - 4 - 6 - 9x &\leq 6 \\ -5x &\leq 6 + 10 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x \geq -\frac{16}{5}$ ตอบ

ตัวอย่าง 18 จงแก้สมการ $-7 < 3x - 2 \leq 5$

วิธีทำ
$$-7 < 3x - 2 \leq 5$$

นำ 2 บวกตลอดอสมการ จะได้ ; $-7 + 2 < 3x \leq 5 + 2$
 $-5 < 3x \leq 7$

นั่นคือ $\frac{-5}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$ ตอบ

ตัวอย่าง 19 จงแก้สมการ $1 - x \leq 3x - 2 < x - 1$

วิธีทำ เนื่องจาก $1 - x \leq 3x - 2$ และ $3x - 2 < x - 1$ ด้วย

ดังนั้น $1 + 2 \leq 3x + x$ และ $3x - 2x < x - 1$

$3 \leq 4x$ และ $x < 1$

$\frac{3}{4} \leq x$ และ $x < 1$

นั่นคือ $\frac{3}{4} \leq x < 1$ ตอบ

ตัวอย่าง 20 พี่มีอายุมากกว่าน้อง 3 ปี แต่พี่น้องคู่นี้มีอายุรวมกันไม่ถึง 25 ปี น้องจะมีอายุมากที่สุดกี่ปี

วิธีทำ ให้น้องอายุ x ปี พี่อายุ $x + 3$ ปี

พี่น้องอายุรวมกันไม่ถึง 25 ปี

อสมการคือ $x - (x + 3) < 25$

$2x < 25 - 3$

$x < \frac{22}{2}$

$$x < 11$$

ดังนั้น น้องอายุมากที่สุด 10 ปี

ตอบ

ตัวอย่าง 21 จำนวนคู่บวก 2 จำนวนเรียงกันรวมกันได้ไม่เกิน 100 จำนวนมากมีค่าน้อยที่สุดและมากที่สุดเท่าใด

วิธีทำ ให้ จำนวนคู่บวกจำนวนมากเป็น x จำนวนคู่บวกจำนวนน้อยจะเป็น $x + 2$

สองจำนวนรวมกันไม่เกิน 100

แต่จำนวนคู่บวกที่น้อยที่สุดคือ 2 จำนวนถัดไปคือ 4

$$\text{อสมการคือ } 6 \leq x + (x - 2) \leq 100$$

$$6 + 2 \leq 2x \leq 100 + 2$$

$$\frac{8}{2} \leq x \leq \frac{102}{2}$$

$$4 \leq x \leq 51$$

ดังนั้น จำนวนคู่บวกจำนวนมากจะมีค่าน้อยที่สุดเป็น 4 และมีค่ามากที่สุดเป็น 50 ตอบ

แบบฝึกหัดที่ 1

คำชี้แจง

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ค่า x จากสมการ $\frac{1}{4}(6 - x) - \frac{1}{5}(1 - x) = \frac{1}{6}x$ เป็นเท่าใด

1. 3

2. 4

3. 6

4. 6

2. รากของสมการ $4(2x - 9) - 3(1 - x) = 5x + 3$ คือข้อใด

1. 1.5

2. 2.25

3. 5.75

4. 7.0

3. คำตอบของสมการ $\frac{7}{3} - \frac{2(x - 10)}{3} = \frac{3(x - 4)}{5}$

1. 8

2. 9

3. 11

4. 15

4. จงแก้ $\frac{x - 2}{3} + \frac{x - 4}{5} - \frac{x - 7}{6} = \frac{x - 5}{2}$

1. -1

2. $\frac{1}{4}$

3. $\frac{1}{3}$

4. 1

5. จงหาค่า x จากสมการ $1.2(x - 2) + 0.5(1 - x) = 2.3$

1. 5.5

2. 6.5

3. 6.0

4. 7.0

6. ชื่นกับชมมีเงินรวมกัน 400 บาท ถ้าชื่นให้เงินชมอีก 10 บาท ชื่นจะมีเงินมากกว่าชมอยู่ 40 บาท เดิมชมมีเงินอยู่กี่บาท

1. 150

2. 160

3. 170

4. 180

7. ปลาตัวหนึ่งท่อนหัวของมันยาว 9 นิ้ว ส่วนท่อนหางยาวเท่ากับท่อนหัวกับอีกครึ่งหนึ่งของลำตัว และท่อนลำตัวของปลาตัวนี้ก็ยาว เท่ากับส่วนยาวของท่อนหัว และท่อนหางรวมกัน ปลาทั้งตัวยาว เท่าใด

- | | |
|-------|-------|
| 1. 36 | 2. 48 |
| 3. 64 | 4. 72 |

8. เสื้อยืดมีทั้งหมด 20 ตัว ราคารวมกัน 1,500 บาท เสื้อมีสองชนิด ชนิดหนึ่งราคาตัวละ 60 บาท อีกชนิดหนึ่งราคาตัวละ 110 บาท ฉันซื้อเสื้อสองชนิดต่างกันกี่ตัว

- | | |
|-------|-------|
| 1. 6 | 2. 8 |
| 3. 14 | 4. 18 |

9. สีเหลี่ยมจัตุรัสและสีเหลี่ยมผืนผ้า มีความยาวของเส้นวัดโดยรอบรูปเท่ากัน ถ้าด้านหนึ่งของ จัตุรัสยาวเป็นสองเท่าของด้านกว้างของสีเหลี่ยมผืนผ้า และด้านยาวของสีเหลี่ยมผืนผ้าเท่ากับ 27 นิ้ว ด้านหนึ่งของสีเหลี่ยมจัตุรัสจะยาวเท่าไร

- | | |
|-------|-------|
| 1. 18 | 2. 20 |
| 3. 24 | 4. 25 |

10. ปีนี้พ่อมีอายุเป็น 2 เท่าของอายุของพี แต่พีโตกว่าผม 3 ปี อีก 14 ปีข้างหน้า อายุของพ่อกับอายุของผมจะเป็น 7: 4 เมื่อ 2 ปีก่อน อายุของพ่อรวมกับอายุของพี และอายุของผมเป็น เท่าใด

- | | |
|-------|-------|
| 1. 62 | 2. 73 |
| 3. 75 | 4. 78 |

11. แม่ค้าซื้อไข่มาจำนวนหนึ่ง ในราคาฟองละ 1.50 บาท แล้วเอามาขายฟองละ 2 บาท ไข่เน่าเสีย 13 ฟอง ขายที่เหลือไปหมดได้กำไรทั้งสิ้น 16 % แม่ค้าซื้อไข่มาทั้งหมดกี่ฟอง

- | | |
|-------|--------|
| 1. 70 | 2. 80 |
| 3. 90 | 4. 100 |

12. ชายคนหนึ่งมีเงิน 2,020 บาท จ่ายให้บุตรทุกคนโดยให้บุตรสาวคนละ 150 บาท และให้บุตรชายคนละ 280 บาท ถ้าเขามีบุตรรวม 10 คน จะมีบุตรสาวมากกว่าบุตรชายกี่คน

- | | |
|------|------|
| 1. 2 | 2. 3 |
| 3. 4 | 4. 5 |

13. นิดแก่กว่าน้อย 4 ปี เมื่อ 8 ปีที่แล้ว $\frac{5}{4}$ เท่าของอายุนิดมากกว่า $\frac{7}{6}$ เท่าของอายุน้อยอยู่ 6 ปี อายุของนิดกับน้อยรวมกันกี่ปีในปัจจุบันนี้

- | | |
|-------|-------|
| 1. 44 | 2. 54 |
| 3. 64 | 4. 68 |

14. ตำบลแดงอยู่ห่างกัน 72 กิโลเมตร ต่างออกเดินเข้าหากันโดยต่างออกเดินด้วยฝีเท้า $\frac{5}{6}$ ของฝีเท้าของแดง และต่างออกเดินทางก่อนแดง 45 นาที ปรากฏว่าเขาสวนกันที่กึ่ง กลางทางพอดี จงหาอัตราเร็วของการเดินทางของแดง (กิโลเมตร / ชั่วโมง)

- | | |
|--------|--------|
| 1. 9.3 | 2. 9.4 |
| 3. 9.6 | 4. 9.8 |

15. จงแก้สมการ $\frac{1}{2}(x-7)-3(1-x) \geq \frac{5}{6}$

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1. $x \geq \frac{62}{15}$ | 2. $x \geq \frac{61}{15}$ |
|---------------------------|---------------------------|

$$3. \quad x \geq \frac{59}{15} \qquad 4. \quad x \geq \frac{58}{15}$$

16. จงแก้สมการ $0 < 3(x - 1) - 40(x - 3) < 6x + 1$

$$1. \quad 8 < x < 9 \qquad 2. \quad \frac{8}{7} < x < 9$$

$$3. \quad 8 < x < 15 \qquad 4. \quad \frac{9}{5} < x < 8$$

17. หนังสือเล่มหนึ่งมี 500 หน้า ถ้าอ่านวันละไม่ถึง 25 หน้า ต้องอ่านอย่างน้อยกี่วันจึงจะจบ

$$1. \quad 20 \qquad 2. \quad 21$$

$$3. \quad 25 \qquad 4. \quad 30$$

18. หนังสือและสมุดกองหนึ่งรวมกันนับจำนวนแล้วปรากฏว่ามีหนังสือน้อยกว่าสมุดอยู่ 10 เล่ม ถ้าหนังสือราคาเล่มละ 25 บาท ส่วนสมุดราคาเล่มละ 5.50 บาท และราคาหนังสือรวมกับสมุดกองนี้รวมกันไม่ถึง 500 บาท จะมีหนังสืออย่างมากกี่เล่ม

$$1. \quad 12 \qquad 2. \quad 13$$

$$3. \quad 14 \qquad 4. \quad 15$$

เฉลย

$$1. \quad 4 \quad 2. \quad 4 \quad 3. \quad 2 \quad 4. \quad 1 \quad 5. \quad 3 \quad 6. \quad 3 \quad 7. \quad 4 \quad 8. \quad 2 \quad 9. \quad 1 \quad 10. \quad 3$$

$$11. \quad 4 \quad 12. \quad 1 \quad 13. \quad 1 \quad 14. \quad 3 \quad 15. \quad 2 \quad 16. \quad 2 \quad 17. \quad 2 \quad 18. \quad 3$$

****ตัวอย่างเฉลยพร้อมวิธีทำ****

1. ตอบข้อ 4

$$\text{วิธีทำ} \quad \frac{1}{4}(6 - x) - \frac{1}{5}(1 - x) = \frac{1}{6}x$$

นำ ค.ร.น. ของ 4, 5, 6 คือ 60 คูณตลอด ; จะได้

$$15(6 - x) - 12(1 - x) = 10x$$

$$90 - 15x - 12 + 12x = 10x$$

$$13x = -78$$

$$\text{ดังนั้น} \quad x = 6$$

ตอบ

2. ตอบข้อ 4

$$\text{วิธีทำ} \quad 4(2x - 9) - 3(1 - x) = 5x + 3$$

$$8x - 36 - 3 + 3x = 5x + 3$$

$$11x - 39 = 5x + 3$$

$$6x = 42$$

$$\text{ดังนั้น} \quad x = 7$$

ตอบ

3. ตอบข้อ 2

$$\text{วิธีทำ} \quad \frac{7}{3} - \frac{2(x - 10)}{3} = \frac{3(x - 4)}{5}$$

นำ ค.ร.น. ของ 3, 3, 5 คือ 15 คูณตลอด ; จะได้

$$35 - 10x + 100 = 9x - 36$$

$$- 10x - 9x = - 36 - 135$$

$$- 19x = - 171$$

$$\text{ดังนั้น} \quad x = 9$$

ตอบ

4. ตอบข้อ 1

$$\text{วิธีทำ} \quad \frac{x-2}{3} + \frac{x-4}{5} - \frac{x-7}{6} = \frac{x-5}{2}$$

นำ ค.ร.น. ของ 3, 5, 6, 2 คือ 30 คูณตลอด จะได้ ;

$$10(x-2) + 6(x-4) - (x+7) = 15(x-5)$$

$$10x - 20 + 6x - 24 - x - 35 = 15x - 75$$

$$11x - 15x = 79 - 75$$

$$- 4x = 4$$

$$\text{ดังนั้น} \quad x = 9 \quad \text{ตอบ}$$

5. ตอบข้อ 3

$$\text{วิธีทำ} \quad 1.2(x-2) + 0.5(1-x) = 2.3$$

$$1.2x - 2.4 + 0.5 - 0.5x = 2.3$$

$$0.7x = 2.3 + 1.9$$

$$\text{ดังนั้น} \quad x = \frac{4.2}{0.7} = 6$$

ตอบ

6. ตอบข้อ 3

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad & \text{ให้ชมมีเงิน} \quad x \quad \text{บาท} \\ & \text{ชมมีเงิน} \quad 400 - x \quad \text{บาท} \\ & \text{ขึ้นให้เงินชม 10 บาท ชมจะมีเงิน} \quad x + 10 \quad \text{บาท} \\ & \text{แต่ขึ้นจะเหลือเงิน} \quad (400 - x) - 10 = 390 - x \quad \text{บาท} \\ & \text{ทำให้ขึ้นมีเงินมากกว่าชมอยู่} \quad 40 \quad \text{บาท} \\ & \text{สมการคือ} \quad (390 - x) - (x + 10) = 40 \\ & \quad \quad \quad 390 - x - x - 10 = 40 \\ & \quad \quad \quad - 2x = 40 - 380 \\ & \quad \quad \quad x = \frac{-340}{-2} \\ & \quad \quad \quad = 170 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \text{ชมมีเงิน 170 บาท}$$

ตอบ

7. ตอบข้อ 4

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad & \text{ให้ท่อนลำตัวของปลาท่อนยาว} \quad x \quad \text{นิ้ว} \\ & \text{ท่อนหางยาวเท่ากับ ท่อนหัวครึ่งหนึ่งของลำตัว} \\ & \text{ท่อนหัวยาว} \quad 9 \quad \text{นิ้ว} \quad \text{ท่อนหางจะยาว} \quad 9 + \frac{x}{2} \quad \text{นิ้ว} \\ & \text{ท่อนลำตัวยาวเท่ากับส่วนยาวของท่อนหัวและท่อนหางรวมกัน} \\ & \text{สมการคือ} \quad x = 9 + (9 + \frac{x}{2}) \end{aligned}$$

$$x - \frac{x}{2} = 18$$

$$\frac{x}{2} = 18$$

$$x = 36$$

$$\text{ดังนั้น ปลาทั้งตัวยาว} = \text{ท่อนหัว} + \text{ท่อนลำตัว} + \text{ท่อนหาง}$$

$$= 9 + 36 + \left(9 + \frac{36}{2}\right)$$

$$= 72 \text{ นิ้ว} \quad \text{ตอบ}$$

8. ตอบข้อ 2

วิธีทำ	ให้ซื้อเสื้อชนิดที่หนึ่งมา	x	ตัว
	อีกชนิดหนึ่งจะซื้อเสื้อเพียง	20 - x	ตัว
	เสื้อตัวแรกราคาตัวละ	60	บาท
	เสื้อชนิดแรกราคารวมกัน	60x	บาท
	เสื้อชนิดหลังราคาตัวละ	110	บาท
	เสื้อชนิดหลังราคารวมกัน	110 (20 - x)	บาท
	เสื้อทั้งสองชนิดราคารวมกัน	1,500	บาท
สมการคือ	60x + 110 (20 - x)	=	1,500

$$60x + 2,200 - 110x = 1,500$$

$$- 50x = 1,500 - 2,200$$

$$x = \frac{-700}{-50}$$

$$= 14$$

$$\begin{aligned} &\text{ซื้อเสื้อชนิดแรกมา 14 ตัว ซื้อเสื้อชนิดหลังมา } 20 - 14 = 6 \text{ ตัว} \\ &\text{ดังนั้นซื้อเสื้อมาต่างกัน } 14 - 6 = 8 \text{ ตัว} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

9. ตอบข้อ 1

วิธีทำ ให้ด้านหนึ่งของสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาว x นิ้ว
ด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวเป็น 2 เท่าของด้านกว้างของสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ด้านกว้างของสี่เหลี่ยมจัตุรัสพื้นผ้าจะยาว $\frac{x}{2}$ นิ้ว
 ส่วนด้านยาวของสี่เหลี่ยมพื้นผ้าจะยาว 27 นิ้ว
 เส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่ากับเส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยมพื้นผ้า
 สมการคือ $4x = 2 \left(\frac{x}{2} + 27 \right)$
 $4x = x + 54$
 $3x = 54$
 $x = 18$
 ดังนั้น ด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาว 18 นิ้ว ตอบ

10. ตอบข้อ 3

วิธีทำ ให้ปัจจุบันพ่ออายุ x ปี
 ปัจจุบันพ่ออายุ $2x$ ปี
 ปัจจุบันผมอายุ $x - 3$ ปี
 อีก 14 ปีข้างหน้า พ่ออายุ $2x + 14$ ปี
 อีก 14 ปีข้างหน้า ผมอายุ $(x - 3) + 14 = x + 11$ ปี
 อีก 14 ปีข้างหน้า อายุพ่อกับอายุผมเป็น 7: 4

สมการคือ $\frac{2x+14}{x+11} = \frac{7}{4}$

$$8x + 56 = 7x + 77$$

$$8x - 7x = 77 - 56$$

$$x = 21$$

ปัจจุบันพ่ออายุ 21 ปี และเมื่อ 2 ปีก่อนอายุ 19 ปี
 ปัจจุบันพ่ออายุ $2(21) = 42$ ปี และเมื่อ 2 ปีก่อนอายุ 40 ปี
 ปัจจุบันผมอายุ $21 - 3 = 18$ ปี และเมื่อ 2 ปีก่อนอายุ 16 ปี

ดังนั้น เมื่อ 2 ปี ก่อนอายุทั้งสามคนรวมกัน $19 + 40 + 16 = 75$ ปี ตอบ

11. ตอบข้อ 4

วิธีทำ ให้แม่ค้าซื้อไข่มาทั้งหมด x ฟอง
 ซื้อมาในราคาฟองละ 1.50 บาท
 ไข่เน่าเสีย 13 ฟอง
 ขายไปเพียง $x - 13$ ฟอง
 ขายในราคาฟองละ 2 บาท
 ขายไปได้เงิน $2(x - 13)$ บาท
 ขายได้กำไร $2(x - 13) - 1.50x = 0.50x - 26$ บาท
 ขายได้กำไร 16 % จากราคาทุน $1.50x$ บาท
 ได้กำไร $\frac{16 \times 1.50x}{100} = 0.24x$ บาท

$$\begin{aligned}
 \text{สมการคือ} \quad 0.50x - 26 &= 0.24x \\
 0.50x - 0.24x &= 26 \\
 0.26x &= 26 \\
 x &= \frac{26}{0.26} \\
 &= 100
 \end{aligned}$$

ดังนั้น แม่ค้าซื้อไข่มาทั้งหมด 100 ฟอง ตอบ

12. ตอบข้อ 1

วิธีทำ	ให้ชายคนนี้มีบุตรสาว	x	คน
	จะมีบุตรชายเพียง	10 - x	คน
	ให้เงินบุตรสาวคนละ	150	บาท
	ให้บุตรสาวทั้งหมดเป็นเงิน	150x	บาท
	ให้เงินบุตรชายคนละ	280	บาท
	ให้บุตรชายทั้งหมดเป็นเงิน	280(10 - x)	บาท
	ชายผู้นี้จ่ายเงินให้บุตรทั้งหมด	2,020	บาท

$$\begin{aligned}
 \text{สมการคือ} \quad 150x + 280(10 - x) &= 2,020 \\
 150x + 2,800 - 280x &= 2,020 \\
 -130x &= 2,020 - 2,800 \\
 x &= \frac{-780}{-130} = 6
 \end{aligned}$$

ชายคนนี้มีบุตรสาว 6 คน และมีบุตรชายเพียง 10 - 6 = 4 คน
 ดังนั้น มีบุตรสาวมากกว่าบุตรชาย 6 - 4 = 2 คน ตอบ

13. ตอบข้อ 1

วิธีทำ	ให้น้อยอายุปัจจุบันเป็น	x	ปี
	นิตอายุปัจจุบันจะเป็น	x + 4	
	เมื่อ 8 ปีที่แล้ว น้อยอายุ	x - 8	
	เมื่อ 8 ปีที่แล้ว นิตอายุ	x + 4 - 8 = x - 4	
	เมื่อ 8 ปีที่แล้ว อายุ นิตมากกว่าอายุน้อย 6 ปี		

$$\begin{aligned}
 \text{สมการคือ} \quad \frac{5(x-4)}{4} - \frac{7(x-8)}{6} &= 6 \\
 15(x-4) - 14(x-8) &= 72 \\
 15x - 60 - 14x + 112 &= 72 \\
 x &= 72 - 52 \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

	น้อยอายุ	20	ปี
	นิตอายุ	24	ปี

ดังนั้น อายุสองคนรวมกัน 44 ปี ตอบ

หลักการสำคัญที่ใช้กับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

- โดยวิธีแทนค่าตัวแปรตัวหนึ่งในรูปตัวแปรอีกตัวหนึ่ง
- โดยการเขียนตัวแปรตัวหนึ่งในรูปของตัวแปรอีกตัวหนึ่งทั้งสองสมการ แล้วนำมาเท่ากัน เข้าสมการใหม่
- โดยการทำสัมประสิทธิ์ตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งทั้งสองสมการให้เท่ากัน เท่ากับ ค.ร.น. ของสัมประสิทธิ์เดิม ของตัวแปรนี้ทั้งสองสมการ แล้วนำมาบวกหรือลบกัน

ตัวอย่าง 1 จงแก้ระบบสมการ $2x + y = 23$ (1)

$$4x - y = 19 \quad \dots\dots\dots(2)$$

วิธีทำ 1 โดยการแทนค่า y ในรูปของ x

จาก (1) $y = 23 - 2x$

$$4x - (23 - 2) = 19$$

$$4x + 2x = 19 + 23$$

$$6x = 42$$

$$x = \frac{42}{6} = 7$$

$$y = 23 - 2(7) = 9$$

$$x = 7 \quad \text{และ} \quad y = 9$$

วิธีที่ 2 โดยการเขียน y ในรูปของ x ทั้งสองสมการ จะได้

$$y = 23 - 2x$$

$$y = 4x - 19$$

$$23 - 2x = 4x - 19$$

$$-2x - 4x = -19 - 23$$

$$-6x = -42$$

$$x = \frac{-42}{-6} = 7$$

และ $y = 23 - 2(7) = 9$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ $5x + 6y = 71$

$$7x - 5y = 19$$

วิธีทำ ทำสัมประสิทธิ์ y ให้เท่ากันกับ ค.ร.น

นั่นคือ หน้า 5 และ 6 คุณกัน

$$5 \times (1) \quad 25x + 30y = 355$$

$$6 \times (2) \qquad 42x - 30y \qquad = \qquad 114$$

$$(3) + (4) \qquad 67x \qquad = \qquad 469$$

$$x = \frac{469}{67} = 7$$

$$5(7) + 6y = 71$$

$$6y = 71 - 35$$

$$y = \frac{36}{6} = 6$$

$$x = 7, y = 6$$

ข้อสังเกต ถึงแม้ว่าโจทย์ข้อนี้จะทำสัมประสิทธิ์ของ x ให้เท่ากัน แล้วนำมาลบกันก็ได้ แต่ไม่นิยมนำสมการมาลบกัน เนื่องจากอาจผิดพลาดเรื่องเครื่องหมาย

$$35x + 42y = 497$$

$$35x - 25y = 95$$

$$67y = 402$$

ต้องระวัง $42y - (-25y)$ บางครั้งอาจผิดพลาดเรื่องเครื่องหมาย จึงนิยมทำสัมประสิทธิ์ตัวแปรเดิม ที่มีเครื่องหมายตรงกันข้ามกัน แล้วนำมาบวกกัน จะได้ไม่ต้องกังวลเรื่องเครื่องหมาย

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้ระบบสมการ $x + 2y - 1 = 10 = x + y + 2$

วิธีทำ

$$x + 2 - 1 = 10$$

$$x + y + 2 = 10$$

$$y - 3 = 0$$

$$y = 3$$

$$x + 3 + 2 = 10$$

$$x = 10 - 5 = 5$$

$$\therefore x = 5, y = 3$$

ตัวอย่างที่ 4

วิธีทำ

$$2(x - y) = 7(y + 2x)$$

$$2(x - y) = 7(y + 2x)$$

$$2x - 2y = 7y + 14x$$

$$-12x = 9y$$

$$x = \frac{-3y}{4}$$

$$1 + 5x + 7y = 0$$

$$1 + 5 \frac{(-3y) + 7y}{4} = 0$$

$$4 - 15y + 28y = 0$$

$$13y = -4$$

$$y = \frac{-4}{13}$$

$$x = \frac{-3(-4)}{4 \cdot 13} = 3$$

ตัวอย่าง 5

$$x = \frac{3}{13}, y = \frac{-4}{13}$$

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{3(y+1)}{5} + \frac{3}{2}$$

วิธีทำ ค.ร.น. คือ 30

$$10(2x - 1) = 18(y + 1) + 15(3)$$

$$20x - 18y = 18 + 45 + 10$$

$$20x - 18y = 73$$

ค.ร.น. คือ 12

$$40(y - 1) = 6(2x - y) - 49$$

$$4y - 12x + 6x = 4 - 49$$

$$10y - 12x = -45$$

$$60x - 54y = 219$$

$$50y - 60x = -225$$

$$-4y = -6$$

$$y = \frac{3}{2}$$

$$20x - 18 = 73$$

$$20x - 27 = 73$$

$$20x = 73 + 27$$

$$x = 100$$

$$= \frac{5}{20}$$

$$x = 5, y = \frac{3}{2}$$

ตัวอย่างที่ 6 $2a + b = 33$ และ $7b - 5a = 3$

วิธีทำ

$$2a + b = 33$$

$$7b - 5a = 3$$

$$14a + 7b = 231$$

$$19a = 228$$

$$a = \frac{228}{19}$$

$$= 12$$

$$2(12) + b = 33$$

$$b = 33 - 24 = 9$$

$$a = \frac{12}{9}$$

$$a = \frac{4}{3}b$$

$$a \text{ เป็น } \frac{4}{3} \text{ เท่าของ } b$$

บางครั้งอาจพบการแก้ระบบเชิงสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรมากกว่า 2 ตัว มักทำโดยการจำกัดตัวแปรที่ละตัวอาจโดยการแทนค่าหรือทำสัมประสิทธิ์ของตัวแปร

ตัวอย่าง 7 จงแก้ระบบสมการ $3x - y + 4z = -1$ (1)

$$2x + 4y - z = 17$$
(2)

$$4x + 2y - z = 15$$
(3)

วิธีทำ $4 \times (2)$ $8x + 16y + 4z = 68$ (4)

$$(1) + (4) \quad 11x + 15z = 67$$
(5)

$$(3) - (2) \quad 2x - 2y = -2$$
(6)

$$(6) \times \frac{15}{2} \quad 15x - 15y = -15$$
(7)

$$(5) + (7) \quad 26x = 52$$

$$x = \frac{52}{26} = 2$$

แทนค่า x ใน (6) จะได้ ; $2(2) - 2y = 4 + 2$

$$y = \frac{6}{2} = 3$$

แทนค่า x, y ใน (2) จะได้ ; $2(2) + 4(3) - z = 17$

$$4 + 12 - z = 17$$

$$z = 16 - 17 = -1$$

$\therefore x, y, z = 2, 3, -1$ ตามลำดับ

ตอบ

ตัวอย่าง 8 จงแก้ระบบสมการ $\frac{x - 2y + z}{3} = x - \frac{34}{9}$ (1)

$$5x + 2z = y + \frac{13}{3} \quad \text{.....(2)}$$

$$2x + y = 7 \quad \text{.....(3)}$$

วิธีทำ จาก (3) $y = 7 - 2x$ (4)

แทนค่า y ใน (1) จะได้ ; $\frac{x - 2(7 - 2x) + z}{3} = y + \frac{34}{9}$

นำ ค.ร.น. คือ 9 คูณตลอด จะได้ ; $3x - 6(7 - 2x) + 3z = 9x - 34$

$$3x + 12x + 3z - 9x = 42 - 34$$

$$6x + 3z = 8 \quad \text{.....(5)}$$

แทนค่า y ใน (2) จะได้ ; $5x + 2z = (7 - 2x) + \frac{13}{3}$

นำ 3 คูณตลอด จะได้ ; $15x + 6z = 21 - 6x + 13$

$$21x + 6z = 34 \quad \text{.....(6)}$$

$2 \times (5)$ $12x + 6z = 16$ (7)

$(6) - (7)$ $9x = 18$

$$x = \frac{18}{9} = 2$$

แทนค่า x ใน (4) $y = 7 - 2(2) = 3$

แทนค่า x ใน (5) $6(2) + 3z = 8$

$$z = \frac{8 - 12}{3} = -\frac{4}{3}$$

$\therefore x, y, z = 2, 3, -\frac{4}{3}$ ตามลำดับ

ตอบ

7.5 โจทย์สมการเชิงเส้นสองตัวแปร

มีวิธีแก้ปัญหาดังนี้

1. อ่านโจทย์ก่อน แล้วพิจารณาว่าโจทย์ถามอะไร ถ้ามีมากกว่า 1 คำถาม ให้กำหนด x, y หรือ z เป็นคำตอบที่โจทย์ถาม แต่ถ้ามีคำถามเดียวแต่ไม่อาจเข้าสมการตัวแปรเดียวได้ ก็อาจต้องกำหนดขึ้นอีก 1 ตัว เป็นจำนวนที่เกี่ยวข้องกับค่าอื่น ๆ ในโจทย์ ซึ่งไม่อาจเขียนในรูปตัวแปรเดียวกับตัวแรกซึ่งเป็นคำตอบของโจทย์ได้ ต้องใช้วิธีการของระบบสมการเชิงเส้นมากกว่า 1 ตัวแปร

โจทย์มีกี่ช่วง แต่ละช่วงเกี่ยวพันกันอย่างไร มีช่วยใดเท่ากันบ้าง จะได้นำมาเข้าสมการ จะเป็นระบบสมการเชิงเส้นกี่ตัวแปรขึ้นอยู่กับข้อ 1 ถ้ามีตัวแปร 2 ตัว ต้องมี 2 สมการ ถ้ามี 3 แปร ต้องมี 3 สมการ การแก้ระบบสมการในข้อ 3 ทำตามการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่ผ่านมาแล้ว นอกจากนี้ยังต้องมีความรู้ในเรื่องอื่น ๆ ด้วย ซึ่งโจทย์ปัญหามักเกี่ยวข้องกับตัวแปร 2 ตัวเช่น

จำนวนกับตัวเลข

เลข 2 หลัก ต้องกำหนดทีละหลัก เช่น ให้ x เป็นหลักสิบและ y เป็นหลักหน่วย ใช้ ค่าประจำหลัก เขียนเลขจำนวนนี้เป็น $10x + y$ และ เลข 3 หลัก ต้องกำหนดทีละหลักเช่นกัน เช่น ให้ x เป็นหลักร้อย y เป็นหลักสิบ และ z เป็นหลักหน่วย จะได้เลขจำนวนนี้เป็น $100x + 10y + z$ และ เลขเศษส่วน ต้องกำหนดเศษ และส่วนเป็นตัวแปรคนละตัว เช่น ให้ x เป็นเศษ และ y เป็นส่วน เศษส่วนจำนวนนั้นคือ $\frac{x}{y}$

ตัวอย่าง 10 ฉันทนาเงิน 48 บาทไปตลาด พบว่า ถ้าซื้อมะม่วง 5 ผล และสับปะรด 7 ผล จะขาดเงินไป 2 บาท แต่ถ้าซื้อมะม่วง 7 ผล และสับปะรด 5 ผล จะเหลือเงิน 2 บาท สับปะรดราคาแพงกว่ามะม่วงเท่าใด

วิธีทำ ให้มะม่วงราคาผลละ x บาท สับปะรดราคาผลละ y บาท

เงิน 48 บาท ซื้อมะม่วง 5 ผล และสับปะรด 7 ผล ขาดเงิน 2 บาท

$$\text{สมการคือ } 5x + 7y = 50 \quad \text{.....(1)}$$

เงิน 48 บาท ซื้อมะม่วง 7 ผล และสับปะรด 5 ผล จะเหลือเงิน 2 บาท

$$\text{สมการคือ } 7x + 5y = 46 \quad \text{.....(2)}$$

$$7 \times (1) \quad 35x + 49y = 350 \quad \text{.....(3)}$$

$$5 \times (2) \quad 35x + 25y = 230 \quad \text{.....(4)}$$

$$(3) - (4) \quad 24y = 24y$$

$$y = \frac{120}{24} = 5$$

$$\text{แทนค่า ใน (1)} \quad 5x + 7(5) = 50$$

$$5x = 50 - 35$$

$$x = \frac{15}{5} = 3$$

มะม่วงผลละ 3 บาท สับปะรดผลละ 5 บาท

$\therefore$ แพงกว่ากัน $5 - 3 = 2$ ตอบ

ตัวอย่าง 11 ซื้อปากกาขายของชนิด ชนิดหนึ่งจำนวน 25 ด้าม อีกชนิดหนึ่งจำนวน 20 ด้าม รวมเป็นเงิน 275 บาท ขายปากกาชนิดแรกได้กำไร 20% และขายชนิดที่สองได้กำไร 15% รวมเป็นกำไรทั้งสิ้น 50 บาท ปากกาสองชนิดนี้ราคาด้ามละเท่าไร

วิธีทำ ให้ซื้อปากกาชนิดแรกมาด้ามละ x บาท ชนิดที่สองมาด้ามละ y บาท

ซื้อปากกาชนิดแรก 25 ด้าม ชนิดที่สอง 20 ด้าม รวมเป็นเงิน 275 บาท

$$\text{สมการคือ} \quad 25x + 20y = 275$$

$$\text{นำ } \frac{1}{5} \text{ คูณตลอด จะได้; } \quad 5x + 4y = 55 \quad \text{.....(1)}$$

ขายปากกาชนิดแรกได้กำไร 20%

ลงทุนชนิดแรก 100 บาท ได้กำไร 20 บาท

$$\text{ลงทุนชนิดแรก } 25x \text{ บาท ได้กำไร } \frac{20 \times 25x}{100} = 5x \text{ บาท}$$

ขายปากกาชนิดที่สองได้กำไร 15%

ลงทุนชนิดที่สอง 100 บาท ได้กำไร 15 บาท

$$\text{ลงทุนชนิดที่สอง } 20y \text{ บาท ได้กำไร } \frac{15 \times 20y}{100} = 3y \text{ บาท}$$

จากโจทย์ ได้กำไรทั้งสิ้น 50 บาท

$$\text{สมการคือ} \quad 5x + 3y = 50 \quad \text{.....(2)}$$

$$(1)-(2) \quad y = 5$$

$$\text{แทนค่า } y \text{ ใน (1); } \quad 5x + 4(5) = 55$$

$$5x = 55 - 20$$

$$x = \frac{35}{5} = 7$$

$\therefore$ ซื้อปากกาชนิดแรกด้ามละ 7 บาท ชนิดที่สองด้ามละ 5 บาท ตอบ

ตัวอย่าง 12 เลขจำนวนหนึ่งประกอบด้วยสองหลัก เลขหน่วยมากกว่าเลขหลักสิบอยู่ 5 ผลบวกของเลขจำนวนนี้กับจำนวนเลขที่มีเลขสับหลักกันกับจำนวนเดิมเป็น 143 จงหาเลขจำนวนเดิม

วิธีทำ ให้เลขจำนวนนี้มีหลักสิบเป็น x และหลักหน่วยเป็น y

$\therefore$ เลขจำนวนนี้คือ $10x + y$

และเลขสับหลักกับเลขจำนวนนี้คือ $10y + x$

จากโจทย์ หลักหน่วยมากกว่าหลักสิบอยู่ 5

$$y - x = 5 \quad \text{.....(1)}$$

จากโจทย์ ผลบวกของเลขจำนวนนี้กับเลขสับหลักเท่ากับ 143

$$(10x + y) + (10y + x) = 143$$

$$11x + 11y = 143$$

$$x + y = 13 \quad \text{.....(2)}$$

$$(1)+(2); \quad 2y = 18$$

$$y = \frac{18}{2} = 9$$

$$\text{แทนค่า } y \text{ ใน (2); } \quad x + 9 = 13$$

$$x = 13 - 9 = 4$$

$\therefore$ เลขจำนวนนี้คือ 49 ตอบ

ตัวอย่าง 13 เมื่อ 10 ปีล่วงมาแล้ว บิดามีอายุเป็น 4 เท่าของบุตร ต่อจากปัจจุบันนี้ไปอีก 6 ปี บิดาจะมีอายุเป็น 2 เท่าของบุตร ปัจจุบันทั้งสองมีอายุคนละกี่ปี

วิธีทำ ให้ปัจจุบันบิดาคนนี้อายุ x ปี
 ให้ปัจจุบันบุตรของเขาอายุ y ปี
 เมื่อ 10 ปีที่แล้ว บิดาอายุ $x-10$ ปี
 เมื่อ 10 ปีที่แล้ว บุตรอายุ $y-10$ ปี
 อีก 6 ปีข้างหน้า บิดาอายุ $x+6$ ปี
 อีก 6 ปีข้างหน้า บุตรอายุ $y+6$ ปี

10 ปีที่แล้วบิดามีอายุ 4 เท่าของอายุบุตร

$$\begin{aligned} \text{สมการคือ} \quad x-10 &= 4(y-10) \\ x-4y &= 10-40 \\ x-4y &= -30 \quad \dots(1) \end{aligned}$$

6ปีข้างหน้าบิดามีอายุเป็น 2 เท่าของอายุบุตร

$$\begin{aligned} x+6 &= 2(y+6) \\ x-2y &= 12-6 \\ x-2y &= 6 \quad \dots(2) \end{aligned}$$

$$(1)-(2); \quad -2y = -36$$

$$y = \frac{-36}{-2} = 18$$

แทนค่า y ใน (1); $x-4(18) = -30$

$\therefore$ บิดามีอายุ 42 ปี และบุตรมีอายุ 18 ปี ตอบ

แบบฝึกหัดที่ 2

คำชี้แจง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. กำหนด $2x-6=3y$ และ $18-y=3x-2$ ค่าของ $x+y$ เท่ากับค่าในข้อใด

1. 2
2. 6
3. 8
4. 9

2. กำหนด $ay+2b^2=2a^2+bx$ และ $2x=y+3b$ ค่าของ xy เท่าใด

1. $2a^2+2ab+3b^2$
2. $2a^2+5ab+2b^2$
3. $2a^2-3ab+b^2$
4. $2a^2-5ab+2b^2$

3. กำหนด $5(x+y)-3(x-y)=(x-y)+3(x+y)$ ค่าของ x^2-y^2 เท่าใด

1. 8
2. 10
3. 12
4. 16

4. กำหนด $\frac{2x+7}{5} = \frac{3y+1}{11} = \frac{y}{4}$ ค่าของ $x-y$ เท่ากับค่าในข้อใด

1. 2
2. 3
3. 4
4. 5

5. กำหนด $6x - 5y = 14$, $7x + 4z + 3y = 22$ และ $4y - 2z - x = 10$ ค่าของ $x + y + z$ เท่ากับค่าใด

1. 9
2. 12
3. 15
4. 16

***เฉลย

1.3 2.2 3.1 4.4 5.1

***เฉลยพร้อมวิธีทำ

ตอบข้อ 3

วิธีทำ ให้ $2x - 6 = 3y$ (1)

$$18 - y = 3x - 2 \quad \text{.....(2)}$$

จาก (2); $-y = 3x - 2 - 18$

$$y = 20 - 3x \quad \text{.....(3)}$$

แทนค่า y ใน (1); $2x - 6 = 3(20 - 3x)$

$$2x - 6 = 60 - 9x$$

$$11x = 66$$

$$x = \frac{66}{11} = 6$$

แทนค่า x ใน (3); $y = 20 - 3(6) = 2$

$$\therefore x + y = 6 + 2 = 8 \quad \text{ตอบ}$$

ตอบข้อ 2

วิธีทำ ให้ $ay + 2b^2 = 2a^2 + bx$ (1)

$$2x = y + 3b \quad \text{.....(2)}$$

จาก (2); $y = 2x - 3b$ (3)

แทนค่า y ใน (1); $a(2x - 3b) + 2b^2 = 2a^2 + bx$

$$2ax - 3ab + 2b^2 = 2a^2 + bx$$

$$2ax - bx = 2a^2 - 2b^2 + 3ab$$

$$x(2a - b) = (2a - b)(a + 2b)$$

เมื่อ $2a - b \neq 0$

$$x = a + 2b$$

แทนค่า x ใน (3); $y = 2(a + 2b) - 3b = 2a + 4b - 3b = 2a + b$

$$\therefore xy = (a + 2b)(2a + b) = 2a^2 + 5ab + 2b^2 \quad \text{ตอบ}$$

ตอบข้อ 1

วิธีทำ ให้ $5(x + y) - 3(x - y) = 14$ (1)

$$(x - y) + 3(x + y) = 14 \quad \text{.....(2)}$$

$3 \times (2)$ $3(x - y) + 9(x + y) = 42$ (3)

$(1) + (3)$ $14(x + y) = 56$

$$14(x + y) = 56$$

แทนค่า $x + y$ ใน (2); $(x - y) = 3(4) = 14$

$$\therefore x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 4(2) = 8 \quad \text{ตอบ}$$

ตอบข้อ 4

วิธีทำ ให้ $\frac{2x-7}{5} = \frac{y}{4}$ (1)

$$\frac{3y+1}{11} = \frac{y}{4}$$
(2)

จาก (2) $2y+4=11y$
 $y=-4$

แทนค่า y ใน (1); $\frac{2x-7}{5} = \frac{-4}{4}$

$$2x-7=-5$$

$$x = \frac{2}{2} = 1$$

$\therefore x - y = 1 - (-4) = 5$ ตอบ

ตอบข้อ 1

วิธีทำ ให้ $6x - 5y = 14$ (1)

$$7x + 4z + 3y = 22$$
(2)
$$4y - 2z - x = 10$$
(3)

$2 \times (3);$ $8y - 4z - 2x = 20$ (4)

$(2) + (4);$ $5x + 11y = 42$ (5)

$11 \times (1);$ $66x - 55y = 154$ (6)

$$25 + 55y = 210$$
(7)
$$91x = 364$$

$$x = \frac{364}{91} = 4$$

แทนค่า x ใน (1); $6(4) - 5y = 14$
 $-5y = 14 - 24$
 $y = \frac{-10}{-5} = 2$

แทนค่า x, y ใน (2); $7(4) + 4z + 3(2) = 22$
 $4z = 22 - 28 - 6$
 $z = \frac{-12}{4} = -3$

$\therefore x + y - z = 4 + 2 - (-3) = 9$ ตอบ

เอกสารอ้างอิง

1. สุทัศน์ ยกส้าน ภาควิชาคณิตศาสตร์ ราชบัณฑิตยสถาน, แหล่งที่มา <https://blog.eduzones.com/preett/33794,11> มีนาคม 2558.
2. <http://www.bright-math.com/index.php/2013-10-15-15-18-58,11> มีนาคม 2558.

3. นายเสรี สุขโยธิน แหล่งที่มา : จากวิกิพีเดีย สารานุกรมเสรี ,www.gotoknow.org/posts/420363,
อ่านต่อได้ที่: <https://www.gotoknow.org/posts/420363,11> มีนาคม 2558
4. กิรติ บุญเจือ.2520 . ตรรกวิทยาทั่วไป.กรุงเทพฯ: ไทยวัฒนาพานิช.
5. จำนงค์ ทรงประเสริฐ.2507. ตรรกศาสตร์.กรุงเทพฯ: เลียงเชียง.
6. ประยงค์ แสณบุราณ. ตรรกศาสตร์เบื้องต้น.ขอนแก่น: วิทยาลัยขอนแก่น.
7. พกสูตรเข้าสอบ คณิต ม.ปลาย พิมพ์ครั้งที่ 7 ปทุมธานี : สกายบุ๊กส์, 2551.
8. สุวรร กาญจนมยุร.2523. ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์.กรุงเทพฯ: ไทยวัฒนาพานิช.แหล่งที่มา : <http://logic-computer.blogspot.com/>, 20 เมษายน 2558.
9. กนกวลี อุชนกรกุลและรณชัย มาเจริญทรัพย์.แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เพิ่มเติม ม.4 เล่ม 1. กรุงเทพฯ : เดอะบุคส์, 2548.
10. กระทรวงศึกษาธิการ. หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ: ชุมชนการเกษตรแห่งประเทศไทย, 2551.
11. กรมวิชาการ. คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์, 2544.
12. แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ โครงการพัฒนาการเรียนการสอนที่เน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลาง ปี 2541. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว,2542.
13. สาระและมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์, 2545.
14. หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 สาระและมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์, 2551.
15. จำรัส อินสม. คู่มือคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1. กรุงเทพฯ : แม็ค, 2547.
16. จีระ เจริญสุขวิมลและวินิจ วงศ์รัตน์. สรุปสูตรหลัก&สูตร คณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 1-2. กรุงเทพฯ: ไอเอ็ดพับลิชชิง จำกัด,ม.ป.ป. ธนวัฒน์ (สันติ) สุนทราพรพล.
17. คู่มือสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน-เพิ่มเติม (ม.4-5-6) เล่ม 1-6. กรุงเทพฯ : SCIENCE CENTER, ม.ป.ป.
18. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. คู่มือครูสาระการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2548.
19. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. กรุงเทพฯ :โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2548.
20. สมัย เหล่าวานิชย์และพัชรพรณ เหล่าวานิชย์. คณิตศาสตร์ ม.4 ค 011. กรุงเทพฯ : ไอเอ็ดพับลิชชิง จำกัด,ม.ป.ป.